Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXVII, № 5

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

А. И. ЛУРЬЕ

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ВОКРУГ ЭЛЛИПСОИДАЛЬНОЙ ПОЛОСТИ

(Представлено академиком Н. И. Мусхелишвили 6 X 1952)

Рассматривается неограниченная упругая среда, имеющая полость в форме трехосного эллипсоида; предполагается, что на достаточном удалении от полости напряженное состояние является однородным, причем главные оси напряжения параллельны осям эллипсоидальной полости; главные напряжения на бесконечности обозначаются σ_1, σ_2, σ_3. Подлежат определению местные напряжения в области, примыкающей к полости.

Эта задача была рассмотрена и решена М. Садовским и Е. Штернбергом [1]. Авторы этой работы применили криволинейные эллиптические координаты и широко использовали эллиптические функции. Решение оказалось очень громоздким и трудно обозримым. В настоящей заметке мы приводим решение, полученное в декартовых координатах и выражающееся через эллиптические интегралы первого и второго рода.

Уравнение семейства эллипсоидов рассматривается в виде:

$$\frac{x^2}{a^2\rho^2}+\frac{y^2}{a^2(\rho^2-e^2)}+\frac{z^2}{a^2(\rho^2-1)}-1=0 \quad (0<e<1, \quad \rho>1), \tag{1}$$

причем поверхности полости соответствует значение ρ_0 параметра ρ.

Вводим в рассмотрение пять гармонических функций, обращающихся в нуль при $\rho\to\infty$:

$$F_1-x\psi_1(\rho)=x\int_\rho^\infty\frac{d\lambda}{\lambda^2\Delta(\lambda)}, \qquad F_2=y\psi_2(\rho)=y\int_\rho^\infty\frac{d\lambda}{(\lambda^2-e^2)\Delta(\lambda)},$$

$$F_3=z\psi_3(\rho)=z\int_\rho^\infty\frac{d\lambda}{(\lambda^2-1)\Delta(\lambda)},$$

$$F_0=\psi_0(\rho)=\int_\rho^\infty\frac{d\lambda}{\Delta(\lambda)}, \qquad F=\frac{1}{2}\int_\rho^\infty\left(\frac{x^2}{\lambda^2}+\frac{y^2}{\lambda^2-e^2}+\frac{z^2}{\lambda^2-1}-a^2\right)\frac{d\lambda}{\Delta(\lambda)}=$$
$$=\tfrac{1}{2}\left[x^2\psi_1(\rho)+y^2\psi_2(\rho)+z^2\psi_3(\rho)-a^2\psi_0(\rho)\right], \tag{2}$$

где обозначено $\Delta(\lambda)=\sqrt{(\lambda^2-e^2)(\lambda^2-1)}$. Гармонические функции F_0, F_1, F_2, F_3 были применены в работе [2] при рассмотрении задачи о действии эллиптического штампа на упругое полупространство; эти же функции в форме произведений Ляме, выраженных через эллиптические функции, использованы в [1]. Функция F представляет потенциал однородного эллипсоида; в [1] вместо F введено произведение Ляме, соответствующее для внутренней задачи одному из гармонических полиномов второй степени. Такой выбор приводит к значительному усложнению вычислений.

Решение задачи выражается в форме П. Ф. Папковича через гармонический вектор $\mathbf{B}$ и гармоническую функцию B_0:

$$u = \frac{4(m-1)}{m}\mathbf{B} - \operatorname{grad}\Phi, \qquad \Phi = xB_x + yB_y + zB_z + B_0. \tag{3}$$

Полагая $\mathbf{B} = \mathbf{B}^{(1)} + \mathbf{B}^{(2)}$, $B_0 = B_0^{(1)} + B_0^{(2)}$, будем иметь:

$$B_x^{(1)} = \frac{M}{\rho_0^2}F_1, \qquad B_y^{(1)} = \frac{M}{\rho_0^2 - e^2}F_2, \qquad B_z^{(1)} = \frac{M}{\rho_0^2 - 1}F_3; \tag{4}$$

$$B_x^{(2)} = -NF_1, \quad B_y^{(2)} = -NF_2, \quad B_z^{(2)} = -NF_3; \quad B_0^{(1)} = Na^2F_0,\ B_0^{(2)} = PF.$$

Чтобы удовлетворить условию обращения в нуль усилий на поверхности полости, постоянные M, N, P должны быть определены из системы трех линейных уравнений:

$$-M\left[\frac{2(m-1)}{m}\frac{\psi_1(\rho_0)}{\rho_0^2} + \frac{2}{m}\frac{\psi_2(\rho_0)}{\rho_0^2 - e^2} + \frac{2}{m}\frac{\psi_3(\rho_0)}{\rho_0^2 - 1} + \frac{2}{m\rho_0^3\Delta(\rho_0)} - \frac{2\chi_1(\rho_0)}{\rho_0^3\Delta^3(\rho_0)}\right] +$$
$$+ N\left[\frac{2(m-1)}{m}\psi_1(\rho_0) + \frac{2}{m}\psi_2(\rho_0) + \frac{2}{m}\psi_3(\rho_0) - \frac{2(m-1)}{m}\frac{1}{\rho_0\Delta(\rho_0)}\right] +$$
$$+ P\left(\psi_1(\rho_0) - \frac{1}{\rho_0\Delta(\rho_0)}\right) = \frac{\sigma_1}{2G}, \tag{5}$$

$$-M\left[\frac{2(m-1)}{m}\frac{\psi_2(\rho_0)}{\rho_0^2 - e^2} + \frac{2}{m}\frac{\psi_3(\rho_0)}{\rho_0^2 - 1} + \frac{2}{m}\frac{\psi_1(\rho_0)}{\rho_0^2} + \frac{2}{m\rho_0(\rho_0^2 - e^2)\Delta(\rho_0)} - \frac{2\chi_2(\rho_0)}{\rho_0^3\Delta^3(\rho_0)}\right] +$$
$$+ N\left[\frac{2(m-1)}{m}\psi_2(\rho_0) + \frac{2}{m}\psi_3(\rho_0) + \frac{2}{m}\psi_1(\rho_0) + \frac{2}{m}\frac{\rho_0}{(\rho_0^2 - e^2)\Delta(\rho_0)} - \frac{2}{\rho_0\Delta(\rho_0)}\right] +$$
$$+ P\left(\psi_2(\rho_0) - \frac{\rho_0}{(\rho_0^2 - e^2)\Delta(\rho_0)}\right) = \frac{\sigma_2}{2G}, \tag{6}$$

$$-M\left[\frac{2(m-1)}{m}\frac{\psi_3(\rho_0)}{\rho_0^2 - 1} + \frac{2}{m}\frac{\psi_1(\rho_0)}{\rho_0^2} + \frac{2}{m}\frac{\psi_2(\rho_0)}{\rho_0^2 - e^2} + \frac{2}{m\rho_0(\rho_0^2 - 1)\Delta(\rho_0)} -\right.$$
$$\left.- \frac{2\chi_3(\rho_0)}{\rho_0^3\Delta^3(\rho_0)}\right] + N\left[\frac{2(m-1)}{m}\psi_3(\rho_0) + \frac{2}{m}\psi_1(\rho_0) + \frac{2}{m}\psi_2(\rho_0) + \frac{2}{m}\frac{\rho_0}{(\rho_2^2 - 1)(\Delta\rho_0)} -\right.$$
$$\left.- \frac{2}{\rho_0\Delta(\rho_0)}\right] + P\left(\psi_3(\rho_0) - \frac{\rho_0}{(\rho_0^2 - 1)\Delta(\rho_0)}\right) = \frac{\sigma_3}{2G}, \tag{7}$$

причем обозначено $\chi_1(\rho) = 2\rho^4 - {}^3/_2(1 + e^2)\rho^2 + e^2$, $\chi_2(\rho) = 2\rho^4 - ({}^3/_2 + e^2)\rho^2 + {}^1/_2 e^2$, $\chi_3(\rho) = 2\rho^4 - (1 + {}^3/_2 e^2)\rho^2 + {}^1/_2 e^2$.

В ([1]) приведена для определения постоянных система 5 уравнений с 5 неизвестными, причем сообщается, что эта система была первоначально получена в форме, содержащей 16 уравнений с 5 неизвестными, которые оказываются совместимыми. Напряженное состояние, определяемое вектором перемещения (3), должно быть наложено на указанное выше однородное напряженное состояние.

Случай сжатого эллипсоида вращения, рассмотренный рядом авторов, получится при $e = 0$; значению $e = 1$ соответствует вытянутый эллипсоид вращения.

Поступило
2 X 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] M. Sadowsky, E. Sternberg, J. Appl. Mech., 16, No. 2 (1949). [2] А. И. Лурье, ДАН, 28, № 2 (1940).