Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXVII, № 5

МЕХАНИКА

М. Ф. ШУЛЬГИН

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ИНТЕГРАЛОВ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком А. И. Некрасовым 11 X 1952)

Настоящая статья является развитием работ [1], в которых были рассмотрены уравнения движения голономных неконсервативных и неголономных механических систем и установлены методы интегрирования этих уравнений, аналогичные классическому методу Пуассона.

Здесь мы рассматриваем систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка вида

$$\dot{x}_k = X_k(t; x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \quad \dot{x}_k = \frac{dx_k}{dt}, \tag{1}$$

и устанавливаем некоторые теоремы о свойствах интегралов этих уравнений.

1. Вводя по способу Лиувилля [2] избыточные переменные $y_1, \ldots, y_n$ и полагая

$$H = \sum_{i=1}^{n} X_i y_i, \tag{2}$$

мы можем заменить систему (1) каноническими уравнениями

$$\dot{x}_k = \frac{\partial H}{\partial y_k}, \quad \dot{y}_k = -\frac{\partial H}{\partial x_k} \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{3}$$

из которых последние n уравнений являются вспомогательными и служат для определения $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

В развернутом виде вспомогательная система уравнений перепишется так:

$$\dot{y}_k + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial X_i}{\partial x_k} y_i = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{4}$$

Система (4) обладает одним замечательным свойством:

Если $f(t; x_1, x_2, \ldots, x_n) = \mathrm{const}$ *есть интеграл заданной системы* (1), *то система уравнений* (4) *удовлетворяется значениями*

$$y_k = \frac{\partial f}{\partial x_k} \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{5}$$

Действительно, заменяя в уравнениях (4) y_k их выражениями (5), имея при этом в виду уравнения (1), получим тождества:

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}X_i\right)=\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{df}{dt}\right)\equiv 0 \quad (k=1, 2, \ldots, n).$$

Таким образом, всякому интегралу заданной системы уравнений (1) соответствует решение (5) вспомогательной системы (4).

2. Из установленного свойства системы (4) непосредственно вытекает такое предложение:

Теорема. *Если известен некоторый интеграл*

$$\varphi(t; x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, y_n)=\mathrm{const} \tag{6}$$

расширенной системы (3) *и в этом интеграле заменить избыточные переменные* $y_1, y_2, \ldots, y_n$ *их значениями из равенств* (5), *в которых* $f=\mathrm{const}$ *есть интеграл системы* (1), *то равенство*

$$\varphi\left(t; x_1, x_2, \ldots, x_n; \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)=\mathrm{const} \tag{7}$$

будет выражать вообще некоторый новый интеграл системы (1).

Установленная теорема дает способ, посредством которого, зная один интеграл расширенной системы (3) и один интеграл уравнений (1), можно найти второй интеграл системы (1); комбинируя этот новый интеграл с прежним интегралом расширенной системы, мы получили бы третий интеграл системы (1), и т. д., и таким образом могли бы отыскать в некоторых благоприятных случаях полную систему независимых интегралов уравнений (1).

3. Частные случаи. 1) Если X_k $(k=1, 2, \ldots, n)$ не зависят от t, а функция $f(t; x_1, x_2, \ldots, x_n)=\mathrm{const}$ есть интеграл системы (1), то $\frac{\partial f}{\partial t}=\mathrm{const}$ будет также интегралом этой системы, следовательно, интегралами будут и $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}=\mathrm{const}$ и т. д.

Действительно, в этом случае расширенная система (3) допускает интеграл вида

$$H=\sum_{i=1}^{n}X_i y_i=\mathrm{const},$$

или, согласно соотношениям (5),

$$\sum_{i=1}^{n}X_i\frac{\partial f}{\partial x_i}=\mathrm{const}. \tag{8}$$

Кроме того, имеет место тождество

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}X_i\frac{\partial f}{\partial x_i}\equiv 0,$$

которое вместе с (8) показывает, что $\frac{\partial f}{\partial x}=\mathrm{const}$ есть интеграл системы (1).

2) Если X_k $(k=1, 2, \ldots, n)$ не зависят явно от координаты x_i, а функция $f(t; x_1, x_2, \ldots, x_n) = \text{const}$ есть интеграл системы (1), то интегралами этой системы будут также и равенства:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \text{const}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \text{const}, \ldots \tag{9}$$

Если же функция f не зависит явно от x_i, то тогда равенства (9) уже не будут интегралами системы (1).

3) Предположим, в частности, что расширенная система (3) допускает интеграл, линейный относительно $y_1, y_2, \ldots, y_n$ вида

$$\psi = \sum_{i=1}^{n} Y_i y_i = \text{const}, \tag{10}$$

где Y_i суть функции переменных $t; x_1, x_2, \ldots, x_n$. Тогда функция ψ будет удовлетворять тождественно условию

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial Y_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} X_k \frac{\partial Y_i}{\partial x_k} - \sum_{k=1}^{n} Y_k \frac{\partial X_i}{\partial x_k} \right) y_i \equiv 0.$$

Написав, что последнее тождество выполняется при любых значениях $y_1, y_2, \ldots, y_n$, мы получим n уравнений

$$\frac{\partial Y_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} X_k \frac{\partial Y_i}{\partial x_k} = \sum_{k=1}^{n} Y_k \frac{\partial X_i}{\partial x_k} \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{11}$$

которые определяют функции Y_i.

Если теперь предположить, что имеется также интеграл $f(t; x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_n) = \text{const}$ системы (1), то, согласно установленной в n°2 теореме, равенство

$$\psi = \sum_{i=1}^{n} Y_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = \text{const} \tag{12}$$

будет также интегралом системы уравнений (1).

Таким образом, мы получили из установленной в n°2 теоремы как частный случай известную теорему Буля ([3]):

Всегда возможно найти n функций $Y_i(t; x_1, x_2, \ldots, x_n)$ таких, что, если $f(t; x_1, x_2, \ldots, x_n) = \text{const}$ есть какой-либо интеграл системы (1), *то выражение* (12) *будет другим интегралом этой системы.*

Теорема Буля, как известно, включает как частный случай классическую теорему Пуассона, но эту теорему можно вывести также и из теоремы Пуассона ([4]).

Среднеазиатский
государственный университет

Поступило
26 IV 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. Ф. Шульгин, ДАН, **81**, № 1 (1951); **83**, № 3 (1952); Докл. Уз.ССР, № 10 (1951). [2] П. Аппель, Руководство по теоретической механике, **2**, **1911**, стр. 510. [3] A. Buhl, C. R., **132**, 313 (1901). [4] P. Appell, C. R., **132**, 317 (1901).