Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXVII, № 5

МАТЕМАТИКА

М. П. ЩЕГЛОВ

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ХАРДИ — ЛАНДАУ — ВИДЖАЯРАГАВАНА

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 30 IX 1952)

Существует следующая классическая теорема Харди — Ландау [1]: *Пусть ряд* $\sum\limits_0^\infty a_n$ *удовлетворяет условиям:*

1°. $a_n < O\left(\frac{1}{n}\right)$;

2°. $\sigma_n \to S$ *при* $n \to \infty$, *где* S — *любое конечное число, т. е.*

$$-\infty < S < +\infty, \qquad (\alpha)$$

и где

$$\sigma_n = \frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n} s_\nu \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

(эта сумма при $n \to \infty$ *дает метод суммирования Чезаро* $(C, 1)$*)*;

$$s_n = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

При этих условиях $s_n \to S$ *при* $n \to \infty$.

Виджаярагаван доказал [2], что *теорема Харди — Ландау остается справедливой, когда*

$$-\infty \leqslant S < +\infty \qquad (\alpha_1)$$

(при сохранении всех прочих условий теоремы).

Далее, в работе [2] доказано, что *если в теореме Харди — Ландау условие* 1° *заменить условием*

1_1°. $a_n < O\left(\frac{1}{n \lg \lg n}\right)$,

то теорема Харди — Ландау будет справедливой при

$$-\infty \leqslant S \leqslant +\infty. \qquad (\alpha_2)$$

В настоящей заметке дано обобщение этих результатов.

Пусть s_n — частные суммы ряда $\sum\limits_0^\infty a_n$ и σ_n — их среднеарифметические (чезаровские) суммы.

Положим

$$\varliminf_{n\to\infty} s_n = d, \quad \varlimsup_{n\to\infty} s_n = D;$$
$$\varliminf_{n\to\infty} \sigma_n = d', \quad \varlimsup_{n\to\infty} \sigma_n = D'. \qquad (\alpha^*)$$

Эти числа — конечные или бесконечные ($-\infty$, $+\infty$) — связаны общим соотношением

$$d \leqslant d' \leqslant D' \leqslant D. \qquad (\mathrm{A})$$

Из соотношения (A) выделим, во-первых, равенства

$$d = d', \qquad D = D' \qquad (0)$$

и, во-вторых, группу неравенств следующих типов*:

$$\begin{array}{llll} 1. & d = d' < D' < D; & 2. & d < d' < D' = D; \\ 3. & d < d' < D' < D; & 4. & -\infty = -\infty' < D' < D; \\ 5. & d < d' < +\infty' = +\infty; & 6. & -\infty < d' < +\infty' = +\infty; \\ 7. & d < +\infty' = +\infty' = +\infty; & 8. & -\infty < +\infty' = +\infty' = +\infty. \end{array} \qquad (\mathrm{A}_1)$$

Теорема 1. *Пусть задана „цепочка" классов рядов* $\left\{\sum\limits_0^{\infty} a_n\right\}$:

$$\text{а)}\quad a_n = o\left(\frac{1}{n}\right); \qquad \text{б)}\quad a_n = O\left(\frac{1}{n}\right);$$
$$\text{в)}\quad a_n < o\left(\frac{1}{n}\right); \qquad \text{г)}\quad a_n < O\left(\frac{1}{n}\right),$$

и пусть их частные суммы преобразованы методом $(C, 1)$.

Тогда между числами (α^*) *возможны из* (A) *и реализуются, соответственно, только соотношения:*

$$\text{а}')\quad \{0\}; \qquad \text{б}')\quad \{0, 1-5\};$$
$$\text{в}')\quad \{0, 5-8\}; \qquad \text{г}')\quad \{0, \mathrm{A}_1\}.$$

Принцип доказательства. Разберем соответствие гг'). Учитывая три факта: 1) теорему Харди — Ландау; 2) если $\sigma_n = O(1)$, то и $s_n = O(1)$, и 3) D и D' должны быть одновременно конечными числами или бесконечными одного знака $\left(\text{это следует из формулы } s_n = \sigma_n + \frac{1}{n+1}\sum\limits_{\nu=1}^{n} \nu a_\nu, \text{ с учетом условия г)}\right)$, заключаем, что для класса г) возможными соотношениями из (A) являются только $\{0, A_1\}$ и все эти соотношения можно конструктивно реализовать.

Теорема 2. *Пусть заданы классы рядов, определяемые условиями*:

$$\text{а)}\quad a_n < o\left(\frac{1}{n \lg\lg n}\right), \qquad \text{б)}\quad a_n < O\left(\frac{1}{n \lg\lg n}\right),$$

и пусть они преобразованы $(C, 1)$.

---

* В этих соотношениях явно выделены бесконечные числа.

Тогда между числами (α^*) *возможны из* (A) *и реализуются, соответственно, только соотношения:*

$$\text{a}')\quad \{0\};\quad \text{б}')\quad \{0, 5\}.$$

Принцип доказательства. Разберем соответствие бб'). Искомые соотношения (для б), очевидно, содержатся в в') (теорема 1). Соотношения 7) и 8) невозможны в силу приведенной теоремы Виджаярагавана*. Можно показать, что соотношение $6 \in (A_1)$ также невозможно, а соотношение $5 \in (A_1)$ имеет место. Нетрудно доказать теорему 2 в целом, если воспользоваться следующей леммой.

Лемма. *Пусть заданы функции*

$$\varphi(u) = \frac{1}{u}\int_{\alpha}^{\beta} (\operatorname{li}\lg x - \operatorname{li}\lg \alpha)\,dx$$

и

$$\psi(u) = \frac{1}{u}\int_{\beta}^{u} (\operatorname{li}\lg x - \operatorname{li}\lg \beta)\,dx,$$

где $\operatorname{li} x \equiv \int_{2}^{x} \frac{dx}{\lg x}, \quad x \geqslant 2, \quad e^2 \leqslant \alpha < \beta \leqslant u.$

Такие функции обладают свойствами:

1) *функция* $\varphi(u)$ *непрерывная и убывающая,* $\psi(u)$ — *непрерывная и возрастающая;*

2) $\varphi(u') \to 1, \quad \psi(u') \to 1$ *при* $u' \to \infty$, *где* $u' = \beta \operatorname{li}\lg \beta$, $\frac{\operatorname{li}\lg \beta}{\operatorname{li}\lg \alpha} \to \infty$ *при* $\alpha \to \infty$.

Из леммы, в частности, следует, что при условии а) всегда $d = d'$; при условии б) d и d' должны быть одновременно конечными числами или бесконечными одного знака.

Теорема 3**. *Каковы бы ни были числа* d, D, d' *и* D', *удовлетворяющие соотношению* (A), *можно построить ряд* $\sum_{0}^{\infty} a_n$ *такой, что* $|a_n| < \omega_n / n$, *где* ω_n $(n = 1, 2, \ldots)$ — *любая наперед заданная последовательность вида* $0 < \omega_n < \omega_{n+1} \to \infty$ *при* $n \to \infty$, *и для него имеют место равенства* (α^*).

Теорема 3, между прочим, показывает, что соответствие бб') в теореме 1 является в некотором смысле наилучшим.

Теорема 4. *Пусть* $w_n = \sum_{\nu=1}^{n} \nu a_\nu \quad (n = 1, 2, \ldots).$

Пусть задана „цепочка" классов рядов $\left\{\sum_{0}^{\infty} a_n\right\}$:

$$\text{А)}\quad w_n = o(n);\qquad \text{Б)}\quad w_n = O(n);$$
$$\text{В)}\quad w_n < o(n);\qquad \text{Г)}\quad w_n < O(n)$$

и пусть они преобразованы $(C, 1)$.

* См. соотношение (α_2), полагая $S = +\infty$.

** Аналогичная теорема доказана для метода суммирования Пуассона (3).

Тогда между числами (α^*) *возможны из* (A) *и реализуются, соответственно, только соотношения:*

A′) $\{0\}$;

Б′) *те, для которых* d, d' — *конечные числа или бесконечные одного знака и* D, D' — *конечные числа или бесконечные одного знака;*

В′) *те, для которых* $D = D'$;

Г′) *те, для которых* D, D' — *конечные числа или бесконечные одного знака.*

В основу доказательства теоремы положена формула

$$s_n = \sigma_n + \frac{1}{n+1} \sum_{1}^{n} \nu a_\nu;$$

эта формула является необходимой и достаточной характеристикой указанных в теореме соответствий.

Для иллюстрации рассмотрим случай ВВ′). В силу приведенной выше формулы следует, что $D = D'$; все такие соотношения $\in$ (A) могут быть реализованы для класса В).

Поступило
5 VII 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ш. Валле-Пуссен, Курс анализа бесконечно-малых, 2, 1933, стр. 145. [2] J. Vijayaraсkavan, J. Lond. Math. Soc., 2, 215 (1927). [3] М. П. Щеглов, Матем. сборн., 28 (90) : 2, гл. 2 (1951).