Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXVII, № 5

МАТЕМАТИКА

И. П. ЕГОРОВ

ДВИЖЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВАХ АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 18 X 1952)

В этой заметке решается вопрос об установлении максимального порядка групп движений пространств аффинной связности (без кручения), отличных от эквиаффинных, и доказывается, что выделяющийся класс максимально подвижных пространств является в определенном смысле непосредственно следующим за классом максимально подвижных пространств A_n аффинной связности ненулевой кривизны. Порядок групп движений максимально подвижных пространств A_n ненулевой кривизны равен n^2 ([1]) и группы транзитивны. Пространства, отличные от эквиаффинных, характеризуются отсутствием симметрии тензора Риччи $R_{\alpha\beta}$, т. е. если

$$R_{\alpha\beta} = c_{\alpha\beta} + a_{\alpha\beta},$$

где $c_{\alpha\beta} = R_{(\alpha\beta)}$, $a_{\alpha\beta} = R_{[\alpha\beta]}$, то тензор $a_{\alpha\beta} \neq 0$. Соотношения

$$D_L a_{\alpha\beta} = 0,$$

где D_L — знак лиевого дифференцирования вдоль V^σ, выражающие инвариантность антисимметрической части тензора Риччи при бесконечно малых преобразованиях из группы движений, позволили нам установить ([2]) следующий результат.

Теорема 1. *Порядок групп движений пространств аффинной связности, отличных от эквиаффинных, не выше $n^2 - n + 3$.*

Пространства аффинной связности, порядок групп движений которых равен $n^2 - n + 3$ или достаточно близок к нему, если они существуют, необходимо являются ([3]) проективно-евклидовыми. С другой стороны, всякое проективно-евклидово пространство определяется в проективно-декартовых координатах коэффициентами связности вида

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = -\delta^{\alpha}_{\beta}\psi_{\gamma} - \delta^{\alpha}_{\gamma}\psi_{\beta}, \tag{1}$$

где ψ_α — некоторый ковариантный вектор, не являющийся в нашем случае градиентным вектором. При доказательстве теоремы 1 мы использовали лишь наличие ненулевого тензора $a_{\alpha\beta} \neq 0$, однако, имеет место следующая теорема:

Теорема 2. *Не существует проективно-евклидовых пространств с антисимметрическим тензором Риччи $R_{\alpha\beta}$.*

Пусть теорема неверна и, например, составляющая $R_{\alpha_1\alpha_2} \neq 0$. Условие обращения в нуль симметрической части тензора Риччи, учитывая формулы (1), дает нам соотношения

$$\partial_{\alpha_1}\psi_{\alpha_2} + \partial_{\alpha_2}\psi_{\alpha_1} + 2\psi_{\alpha_1}\psi_{\alpha_2} = 0 \quad \left(\frac{\partial}{\partial x^{\alpha_1}} = \partial_{\alpha_1}\right);$$

кроме того, имеем

$$\partial_{\alpha_1}\psi_{\alpha_2} - \partial_{\alpha_2}\psi_{\alpha_1} = \frac{R_{\alpha_1\alpha_2}}{n+1}. \tag{2}$$

Из этих соотношений получаем, следовательно:

$$\begin{aligned} \partial_{\alpha_1}\psi_{\alpha_2} &= \frac{R_{\alpha_1\alpha_2}}{n+1} - \psi_{\alpha_1}\psi_{\alpha_2} \quad (\alpha_1 \neq \alpha_2); \\ \partial_{\alpha_2}\psi_{\alpha_2} &= -\psi_{\alpha_2}^2 \quad (\alpha_1, \alpha_2 = 1, 2, \ldots, n). \end{aligned} \tag{3}$$

Наша задача сводится к определению функций ψ_α из системы дифференциальных уравнений (3), представленных в виде, разрешенном относительно производных первого порядка от всех функций по всем аргументам. Если первое уравнение системы (3) продифференцировать по x^{α_2}, а второе по x^{α_1}, то условие интегрируемости дает

$$\partial_{\alpha_2} R_{\alpha_1\alpha_2} + 3\psi_{\alpha_2} R_{\alpha_1\alpha_2} = 0.$$

Меняя в этом соотношении местами индексы α_1, α_2, получим

$$\partial_{\alpha_1} R_{\alpha_1\alpha_2} + 3\psi_{\alpha_1} R_{\alpha_1\alpha_2} = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\psi_{\alpha_1} = -\frac{\partial}{\partial x^{\alpha_1}}\left(\ln\sqrt[3]{R_{\alpha_1\alpha_2}}\right), \quad \psi_{\alpha_2} = -\frac{\partial}{\partial x^{\alpha_2}}\left(\ln\sqrt[3]{R_{\alpha_1\alpha_2}}\right).$$

Подстановка найденных ψ_{α_1}, ψ_{α_2} в уравнение (2) дает обращение в нуль составляющей $R_{\alpha_1\alpha_2}$, ч. т. д.

Таким образом, можно ожидать снижения границы, выявленной теоремой 1, для порядка максимальных групп движений рассматриваемых пространств, привлекая к рассмотрению инвариантную при движениях заведомо ненулевую симметрическую часть $C_{\alpha\beta}$ тензора $R_{\alpha\beta}$:

$$D_L C_{\alpha\beta} = 0. \tag{4}$$

Из доказательства теоремы 2 следует даже, что если $a_{\alpha_1\alpha_2} \neq 0$, то по крайней мере одна из трех величин

$$C_{\alpha_1\alpha_1}, \quad C_{\alpha_2\alpha_2}, \quad C_{\alpha_1\alpha_2}$$

отлична от нуля.

Теорема 3. *Максимально подвижные пространства аффинной связности, отличные от эквиаффинных, обладают транзитивными полными группами движений точно порядка* $n^2 - n + 1$.

Действительно, выделяя из соотношений (4) уравнения $(\alpha_1\alpha_1)$, $(\alpha_2\alpha_2)$ и функции $V^1_{,1}$, $V^1_{,2}$, если $C_{\alpha_1\alpha_1} \neq 0$, или уравнения $(\alpha_1\alpha_1)$, $(\alpha_2\alpha_2)$ и функции $V^2_{,1}$, $V^1_{,2}$, если $C_{\alpha_1\alpha_2} \neq 0$ (случай $C_{\alpha_2\alpha_2} \neq 0$ приводится к первому случаю), мы во всяком случае добьемся наличия в условиях интегрируемости уравнений, определяющих компоненты вектора V^σ бесконечно малого движения, по крайней мере $2n-1$ независимых соотношений, из которых $2n-3$ соотношений выделяются теоремой 1. Следовательно, группа движений содержит не более n^2-n+1 параметров.

С другой стороны, пространство аффинной связности (1), определенное вектором $\psi_1 = x^2$, $\psi_2 = -x^1$, $\psi_3 = \cdots = \psi_n = 0$, обладает группой движения порядка n^2-n+1. Ее инфинитезимальные операторы будут:

$$x^1 p_2, \ x^2 p_1, \ x^1 p_1 - x^2 p_2$$

$$p_i, \ p_i x^\alpha \quad (i = 3, 4, \ldots, n; \quad \alpha = 1, 2, \ldots, n).$$

Транзитивность таких групп следует из того, что в условиях интегрируемости мы рассматривали лишь функции $V^\sigma\tau$. Учитывая тот факт, что порядок групп движений непроективно-евклидовых пространств не выше n^2-2n+5 (3), непосредственно получаем:

Теорема 4. *Максимально подвижные пространства аффинной связности, отличные от эквиаффинных, являются проективно-евклидовыми.*

Теорема 5. *Максимально подвижные проективно-евклидовы пространства, для которых ранг антисимметрической части тензора $R_{\alpha\beta}$ равен $2k$, обладают транзитивными полными группами движений точно порядка $r = n^2 - (n-k)(2k-1)$.*

Рассмотрим теперь вопрос о существовании пространств аффинной связности с полными группами движения порядка r, где $n^2-n+1 < r < n^2$. Мы докажем следующую теорему:

Теорема 6. *Не существует пространств аффинной связности A_n, обладающих полными транзитивными группами движений порядка r, где $n^2-n+1 < r < n^2$.*

Действительно, пусть A_n — аффинное связное пространство; G_r — его группа движений, где r удовлетворяет указанному неравенству. В таком случае пространство A_n необходимо будет проективно-евклидовым с симметрическим тензором $R_{\alpha\beta}$ в силу теоремы 3. Ранг этого тензора равен единице, т. е.

$$R_{\alpha\beta} = (1-n)\,\varepsilon\lambda_\alpha\lambda_\beta \quad (\varepsilon = \pm 1),$$

λ_α — некоторый ковариантный вектор. Соотношения $D_L\lambda_{\alpha\beta} = 0$, выражающие вторую серию условий интегрируемости уравнений, определяющих вектор V^σ, дают возможность сделать вывод о градиентности вектора $\lambda_\alpha = \partial_\alpha\lambda$ и наличии соотношения

$$\lambda_{\alpha,\,\beta} = \varepsilon_1 a_\alpha a_\beta \quad (\varepsilon_1 = \pm 1).$$

Однако вектор a_α, входящий в правую часть этих соотношений, необходимо отличается лишь множителем от вектора λ_α. Следовательно, $\lambda_{\alpha,\beta} = \sigma\lambda_\alpha\lambda_\beta$, где σ — функция от λ, в нашем случае обращающаяся в постоянную. Итак, выполнены все три необходимые и достаточные условия для того, чтобы рассматриваемое A_n являлось максимально подвижным пространством из совокупности пространств ненулевой кривизны (2), следовательно, $r = n^2$, ч. т. д.

Если множитель $\sigma(\lambda)$ не является постоянным, то приходим к заключениям:

Теорема 7. *Максимальный порядок r интранзитивных групп движений пространств аффинной связности точно равен n^2-1.*

Теорема 8. *Не существует пространств аффинной связности A_n, обладающих полными интранзитивными группами движений порядка r, где $n^2 - n + 1 < r < n^2 - 1$.*

Легко получается тензорная характеристика всех максимально подвижных пространств с интранзитивной группой движений порядка $n^2 - 1$. Они будут проективно-евклидовыми и эквиаффинными, для которых

$$R_{\alpha\beta} = (1 - n)\,\varepsilon\lambda_\alpha\lambda_\beta; \tag{5}$$

$$\lambda_{\alpha,\,\beta} = \sigma(\lambda)\,\lambda_\alpha\lambda_\beta, \qquad \frac{d\sigma}{d\lambda} \not\equiv 0. \tag{6}$$

Если в соотношения (5), (6) вставить коэффициенты связности, определенные формулами (1), то получим систему дифференциальных уравнений относительно функций ψ и λ, из которой следует существование максимально подвижных пространств с интранзитивной полной группой движений порядка $n^2 - 1$.

Теорема 9. *Существует единственное решение системы уравнений (5), (6), где σ — аналитическая функция от λ, для которого функции ψ, λ и их первые производные принимают в рассматриваемой точке пространства наперед заданные начальные значения.*

G. Vranceanu указывает ([4]), что максимально подвижные проективно-евклидовы пространства ненулевой кривизны, определенные в проективно декартовых координатах векторами $\psi_1 = 1$, $\psi_2 = \psi_3 = \cdots = \psi_n = 0$ и $\psi_1 = k / x^1$, $\psi_2 = \psi_3 = \cdots = \psi_n = 0$, где постоянное $k \neq 0$, суть единственно возможные максимально подвижные пространства и что они являются несимметрическими. Однако, например, симметрическое проективно-евклидово пространство, для которого вектор связности имеет вид

$$\psi_1 = \frac{ax^1}{a(x^1)^2 + b}, \quad \psi_2 = \psi_3 = \cdots = \psi_n = 0 \quad (a \neq 0,\ b \neq 0),$$

допускает n^2-членную группу движений, т. е. является максимально подвижным. Оно оказалось упущенным, если пожелаем оставаться в вещественном многообразии $x^1,\ x^2,\ \cdots\ x^n$.

Вопрос об определении всех максимально подвижных пространств A_n ненулевой кривизны рассмотрен нами в работе ([2]).

В заключение автор выражает благодарность проф. П. К. Рашевскому за ряд ценных советов и замечаний во время обсуждения этой статьи.

Поступило
13 X 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. П. Егоров, ДАН, 57, № 9 (1947). [2] И. П. Егоров, ДАН, 84, № 2 (1952). [3] И. П. Егоров, ДАН, 80, № 5 (1951). [4] G. Vrănceanu, Grupurile de mişcare ale spaţiilor cu conexiune, Studii şi cercetări Matematice, 3—4 (1951).