Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXVII, № 3

ТЕХНИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

А. В. ГАПОНОВ

НЕГОЛОНОМНЫЕ СИСТЕМЫ С. А. ЧАПЛЫГИНА И ТЕОРИЯ КОЛЛЕКТОРНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ МАШИН

(Представлено академиком А. А. Андроновым 20 IX 1952)

1. В настоящей работе выводятся уравнения движения квази-стационарной модели электрической машины, в частности коллекторной машины. Модель имеет конечное число механических степеней свободы, но содержит, вообще говоря, объемные (или поверхностные) проводники, распределение тока в которых считается заранее заданным. В работе показано, что «закрепление» (в указанном ниже смысле) распределения тока в проводниках равносильно наложению счетного множества кинематических связей. Классификация связей на интегрируемые и неинтегрируемые соответствует классификации машин на бесколлекторные и коллекторные. Для квази-стационарной модели неинтегрируемые связи имеют структуру, рассмотренную впервые Чаплыгиным. Соответственно уравнения движения коллекторных машин могут быть записаны в виде уравнений Чаплыгина; благодаря счетному множеству связей модель, несмотря на наличие объемных проводников, имеет конечное число степеней свободы. В работе показано также, что введение в функцию Лагранжа дополнительных переменных позволяет записать уравнения движения в форме, не содержащей в явном виде коэффициентов уравнений связи и поэтому более удобной для практического использования.

2. Будем характеризовать положение одного из объемных проводников электромеханической системы координатами x^m и жестко свяжем с ним систему координат ξ^m. Выберем в области V^m, включающей в себя этот проводник, полную — по отношению к допустимым функциям распределения тока — систему ортогональных векторных функций $\mathbf{S}_s^m(\xi^m)$ (где $m = 1, 2, \ldots, M$; M — число проводников; $s = 1, 2, \ldots$). Тогда плотность тока в данном проводнике можно представить в виде сходящегося ряда по $\mathbf{S}_s^m$. Повторяя аналогичную операцию для всех проводников, получим разложение плотности тока $\mathbf{j}$ по полной системе векторных функций $\mathbf{S}_r(\xi)$, являющейся совокупностью всех $\mathbf{S}_s^m(\xi)$:

$$\mathbf{j}(\xi) = \sum_r^{\infty} A_r \mathbf{S}_r(\xi). \tag{1}$$

Согласно общему методу Лагранжа, величины A_r следует принять за обобщенные скорости $A_r = \dot{\varkappa}_r(t)$. Если $\varkappa_r$ и x — независимые переменные, то, вычислив функцию Лагранжа $L = L_{\text{мех}}(x\dot{x}) + L_{\text{эл}}(x\dot{\varkappa})$, можно составить счетное множество дифференциальных уравнений, определяющих, наряду с другими переменными, коэффициенты ряда (1).

Основная гипотеза предлагаемой ниже теории электрических машин, в которой ротор и статор рассматриваются как объемные проводники, заключается в том, что распределение тока в этих проводниках, благодаря наличию щеток и своеобразной анизотропии, обусловленной обмотками, считается заданным, в том смысле, что плотность тока в них удовлетворяет условию

$$\mathbf{j}(\xi) = \sum_{n=1}^{N} \dot{q}_n \mathbf{f}_n (u_n \xi), \tag{2}$$

где $\dot{q}_n$ — независимые переменные (токи); N — число «электрических» степеней свободы, а $\mathbf{f}_n (u_n \xi)$ — заданные функции распределения, зависящие от конфигурации проводников через переменные u_n*.

Нетрудно убедиться, что *уравнения движения* (8) — (9), *полученные на основе этой гипотезы, совпадают для бесколлекторных машин с обычными уравнениями Лагранжа—Максвелла, а для коллекторных — с приближенными уравнениями, полученными усреднением точных разностных уравнений движения* (см. [5]).

3. Разложив сумму (2) в ряд по $\mathbf{S}_r(\xi)$, получим

$$\mathbf{j}(\xi) = \sum_{r}^{\infty} \left[\sum_{n=1}^{N} \dot{q}_n k_r^n (u_n) \right] \mathbf{S}_r (\xi). \tag{1'}$$

Из сравнения разложений (1) и (1′) следует, что «*закрепление*» *распределения тока равносильно наложению счетного множества связей*

$$\dot{x}_r = \sum_{n=1}^{N} k_r^n (u_n)\, \dot{q}_n \tag{3}$$

на обобщенные скорости $\dot{x}_r$. В общем случае, когда переменные зависят от механических координат x, связи (3) *неинтегрируемы*, и электромеханическая система с закрепленным распределением тока есть *неголономная динамическая система*.

Рассматривая системы с конечным числом связей типа (3) (x_r — циклические координаты), С. А. Чаплыгин [1] показал, в частности, что их уравнения движения не могут быть записаны при помощи одной преобразованной функции Лагранжа (L), получаемой подстановкой связей в функцию Лагранжа L исходной системы.

Для электромеханических систем со связями (3) уравнения Чаплыгина имеют вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial (L)}{\partial \dot{q}_n} - \sum \dot{x} \sum_{r}^{\infty} \frac{\partial k_r^n}{\partial x} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_r} \right)_n = E_n - \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_n} \tag{4}$$

для «электрических» и

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial (L)}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial (L)}{\partial x} + \sum_{n=1}^{N} \dot{q}_n \sum_{r}^{\infty} \frac{\partial k_r^n}{\partial x} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_r} \right) = Q_x - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \tag{5}$$

---

* Например, средняя плотность тока $\mathbf{j}$ в роторе коллекторной машины с двумя щетками и большим числом коммутирующих элементов определяется полным током через щетки $\dot{q}$ и углом $u_щ$, характеризующим их положение в системе координат, жестко связанной с ротором: $\mathbf{j} = \dot{q}\mathbf{f}(u_щ, \xi)$, в частности, при равномерном вращении ротора $u_ш = \varphi_0 t$ — линейная функция времени.

для «механических» координат. Здесь E_n — сторонняя эдс, соответствующая току $\dot{q}_n$; Q_x — обобщенная сила, действующая по координате x; F — обычным образом составленная диссипативная функция; первая сумма в уравнении (4) берется по всем механическим координатам. Уравнения (4) — (5) в явном виде содержат функцию L и все коэффициенты связи k_r^n, поэтому их неудобно непосредственно использовать для описания движения систем со счетным множеством связей *. Нетрудно, однако, показать, что, вводя переменные u_n в преобразованную функцию L^* в качестве независимых переменных:

$$L^*(x, \dot{x}, \dot{q}, u) = L\left\{x, \dot{x}, \dot{q}, \sum_{n=1}^{N} k_1^n(u_n)\dot{q}_n, \sum_{n=1}^{N} k_2^n(u_n)\dot{q}_n, \ldots\right\}$$

можно в общем виде исключить связи и функцию Лагранжа исходной системы из уравнений движения. Уравнения движения системы типа Чаплыгина записываются при этом через функцию L^* и ее производные. L^* составляется как обычная функция Лагранжа, с тою разницей, что переменные u_n, характеризующие каждое распределение $\mathfrak{f}_n(u_n\xi)$, считаются независимыми и явно входят в L^*. В случае линейной кривой намагничения $L^* = \frac{1}{2}\sum_{,l} L_{ln}(xu)\dot{q}_l\dot{q}_n + L_{\text{мех}}$; с учетом насыщения в железе L^* имеет более сложный вид (²).

Исключение связей из уравнений движения дает:

а) «электрические» уравнения, которые отличаются от обычных уравнений Лагранжа только добавочными членами:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_n} - \sum \frac{\dot{u}_n}{\dot{q}_n}\frac{\partial L^*}{\partial u_n} = E_n - \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_n}, \quad 1, 2, \ldots, N, \tag{6}$$

где сумма берется по всем u_n, характеризующим n-ю функцию распределения $\mathfrak{f}_n$ (их может быть несколько); в случае $\dot{u} = 0$ распределение тока в проводниках не меняется, связи (3) интегрируемы, и уравнения (6) переходят в уравнения Лагранжа;

б) «механические» уравнения сохраняют лагранжеву форму

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L^*}{\partial x} = Q_x - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}. \tag{7}$$

После того как в (6) и (7) взяты частные производные по x и u_n, в них следует подставить выражения «переменных связи» через координаты и время $u_n = u_n(x, t)$.

4. У электрических машин, обмотка ротора которых рассматривается как объемный (или поверхностный — для поверхностных проводников приведенный выше вывод уравнений движения также, очевидно, справедлив) проводник с заранее заданным распределением тока **, роль «переменных связи» u_n играют угловые координаты щеток

---

* Для более грубого описания движения электрических машин можно аппроксимировать ряд (1) конечной суммой. Например, для машины с цилиндрическим ротором можно ограничиться суммой двух членов (первой гармоникой тока); уравнения такой модели совпадают, как нетрудно показать, с основными уравнениями Крона (⁴), которые являются, таким образом, частным случаем уравнений Чаплыгина.

** Распределение тока в обычном поверхностном или объемном проводнике, мало меняющееся в некотором диапазоне частот и скоростей (например, распределение тока в якоре униполярной машины), также можно приближенно рассматривать как заранее заданное. В такой идеализации униполярные и коллекторные машины принадлежат к одному классу электромеханических систем.

относительно ротора. В теории машин вместо u_n удобнее пользоваться угловыми координатами щеток α_p относительно статора; если угол поворота ротора φ, то $\alpha_p = \varphi + u_p$. Вращающаяся щетка является наиболее общим способом снимания тока с якоря ($\dot{\alpha} = \dot{\varphi}$ соответствует выводу на кольцо, $\dot{\alpha} = 0$ — выводу на неподвижную щетку через коллектор ([3])), поэтому мы примем, что α_p—произвольная функция времени. Функцию Лагранжа, выраженную через параметры α_p, обозначим $\overline{L}$. Если независимые контуры в электромеханической системе, включающей в себе электрические машины, выбраны таким образом, что k-й контур проходит через щетки с номерами p_k, то контурному току $\dot{q}_k$ соответствует уравнение

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\overline{L}}{\partial\dot{q}_k} - \sum_{p=p_k}\frac{\dot{\alpha}_p - \dot{\varphi}_p}{\dot{q}^{(p)}}\frac{\partial\overline{L}}{\partial\alpha_p} = E_k - \frac{\partial F}{\partial\dot{q}_k}, \tag{8}$$

где сумма берется по всем щеткам k-го контура *; $\dot{q}^{(p)}$ — полный ток через p-ю щетку; $\dot{\varphi}_p$ — скорость ротора той машины, на которой находится p-я щетка. Уравнение движения m-го ротора имеет вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\overline{L}}{\partial\dot{\varphi}_m} - \frac{\partial\overline{L}}{\partial\varphi_m} - \sum_{p=p_m}\frac{\partial\overline{L}}{\partial\alpha_p} = Q_m - \frac{\partial F}{\partial\dot{\varphi}_m}, \tag{9}$$

где сумма берется по всем щеткам p_m, касающимся m-го ротора. При любых $\dot{\alpha} \neq \dot{\varphi}$ связи (3) не интегрируемы, и коллекторная машина — неголономная динамическая система. Только при $\dot{\alpha} = \dot{\varphi}$ (бесколлекторная машина) уравнения (8) и (9) переходят в уравнение Лагранжа **.

Горьковский исследовательский
физико-технический институт

Поступило
15 IX 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. А. Чаплыгин, Тр. Отд. физ. наук Об-ва любит. естествозн., 9 (1897). [2] F. Emde, Arch. f. Elektrotechn., 1, 505 (1913). [3] И. М. Садовский, Электричество, № 4 (1949). [4] G. Kron, J. Math. and Phys., 13, 103 (1934). [5] А. В. Гапонов, ДАН, 82, 719 (1952).

* При исключении связей существенно, что разные „ветви" $f_n(u_n)$ характеризуются различными переменными u_n. Поэтому, если система независимых контуров выбрана так, что одна и та же щетка служит общим началом двух (или более) различных „ветвей", то ее следует „расщепить" на две (или более) щетки, каждая из которых характеризуется своим параметром. Только после выполнения дифференцирования по α_p в (8) эти параметры можно положить равными друг другу.

** Частный случай уравнений (8) (в отсутствие насыщения) приведен в работе ([3]). Однако предлагаемый автором вывод этих уравнений, использующий только закон сохранения энергии, неудовлетворителен.