Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXVII, № 4

ТЕПЛОТЕХНИКА

К. Д. ВОСКРЕСЕНСКИЙ

ОБ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

(Представлено академиком М. В. Кирпичевым 26 IX 1952)

Рассмотрим изотропное тело (без внутренних источников тепла), на достаточно гладкой поверхности S которого задано кусочно-постоянное распределение температуры

$$t\,|_{S_{1;i}} = t_1 \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$
$$t\,|_{S_{2;k}} = t_2 < t_1, \quad (k = 1, 2, \ldots, m), \tag{1}$$

причем

$$\sum_{i=1}^{n} S_{1,i} + \sum_{k=1}^{m} S_{2;k} = S.$$

Пусть коэффициент теплопроводности тела является заданной функцией температуры $\lambda = \lambda(t)$, непрерывной со своей первой производной в интервале от t_1 до t_2.

Стационарное поле температуры в этом теле описывается нелинейным дифференциальным уравнением

$$\operatorname{div}[\lambda(t)\operatorname{grad} t] = 0, \tag{2}$$

а поле вектора теплового потока $\mathbf{q}$ и расход тепла Q через тело — уравнениями

$$\mathbf{q} = -\lambda(t)\operatorname{grad} t, \tag{3}$$

$$Q = -\lambda_1 \sum_{i=1}^{n} \int_{S_{1;i}} (\operatorname{grad} t,\, d\mathbf{S}_{1;i}), \tag{4}$$

где $\lambda_1 = \lambda(t_1)$.

Покажем, что решение этой нелинейной задачи (т. е. определение t, $\mathbf{q}$ и Q) может быть сведено к аналогичной линейной задаче с постоянным коэффициентом теплопроводности, равным

$$\lambda_{\text{ср}} = \frac{1}{\Delta t}\int_{t_2}^{t_1} \lambda(t)\, dt, \tag{5}$$

где $\Delta t \equiv t_1 - t_2$.

Для этого введем в рассмотрение вспомогательную функцию T

$$T \equiv \frac{1}{\lambda_{\text{ср}}}\int_{t_2}^{t} \lambda(t)\, dt + t_2. \tag{6}$$

Из последнего уравнения находим

$$t = t_2 + \lambda_{\text{ср}} \int_{t_2}^{T} \frac{dT}{\lambda(t)}. \tag{7}$$

Подставив (7) в (1)—(4), после преобразований получим

$$\nabla^2 T = 0, \quad T|_{S_{1;\,i}} = t_1, \quad T|_{S_{2;\,k}} = t_2; \tag{8}$$

$$\mathbf{q} = -\lambda_{\text{ср}} \operatorname{grad} T, \quad Q = -\lambda_{\text{ср}} \sum_{i=1}^{n} \int_{S_{1;\,i}} (\operatorname{grad} T,\ d\mathbf{S}_{1;\,i}). \tag{9}$$

Разрешив линейную задачу (8) относительно T и воспользовавшись соотношениями (6) и (9), находим поля температуры t и вектора $\mathbf{q}$, а также расход тепла Q в теле с $\lambda = \lambda(t)$.

Поступило
25 IX 1952