Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXVII, № 4

ТЕХНИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

М. А. МИЛЛЕР

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НАД ПЛОСКОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ С АНИЗОТРОПНЫМИ ОДНОРОДНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

(Представлено академиком М. А. Леонтовичем 25 IX 1952)

1. Настоящая работа посвящена решению задачи о распространении электромагнитных волн над плоской поверхностью с заданными на ней однородными анизотропными условиями вида *

$$E_z = Z_1 H_y\,|_{x=0}, \quad E_y = -Z_2 H_x\,|_{x=0}, \tag{1}$$

где x, y, z — прямоугольные координаты; $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ — напряженности электрического и магнитного полей, а Z_1 и Z_2 — некоторые, вообще говоря различные по величине, комплексные импедансы, которые можно рассматривать как две компоненты тензора поверхностного импеданса Z.

Такого рода задачи возникают в тех случаях, когда поверхность $x=0$ является границей раздела двух сред, в одной из которых (среда I, $x<0$) структура поля известна и не зависит от структуры поля во второй среде (II, $x>0$). Например, частным случаем условия (1) является граничное условие Леонтовича, формулируемое для границы раздела диэлектрика с хорошо проводящим металлом. Другим примером может служить идеально проводящий металлический лист, покрытый слоем (толщины l) идеального изолятора с большой диэлектрической (ε) или магнитной (μ) проницаемостью. На границе этого изолятора с окружающим пространством (ε_0, μ_0) можно сформулировать приближенные (точность $\sqrt{\mu_0\varepsilon_0/\mu\varepsilon}$) условия вида (1). В случае изотропного изолятора $Z_1 = Z_2 = i\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\operatorname{tg} kl$, $k=\omega\sqrt{\varepsilon\mu}$. Помимо этого рассматриваемая нами задача является вспомогательной при исследовании распространения волн и над другими средами и плоской границей раздела. Действительно, для получения точного решения необходимо непрерывно «сшить» на границе $x=0$ тангенциальные составляющие полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$. Но, как нетрудно показать ([1]), для получения уравнения, определяющего возможные значения постоянных распространения волн, например поперечно-магнитного или поперечно-электрического типа, достаточно приравнять на границе поперечные (по отношению нормали к границе) импедансы полей в средах I и II. Требуя выполнения условий вида (1) и не обращаясь непосредственно к какой-либо определенной «среде», задающей эти условия, мы тем самым имеем возможность исследовать задачу в общем виде, в частности, опреде-

* Всюду используется практическая рационализированная система единиц.

лить допустимые значения постоянных распространения волн. Как будет показано ниже, анизотропность условий (1) существенно влияет на свойства поля в среде II. Примером «среды» с принципиально анизотропной границей является металло-пластинчатая периодическая структура, состоящая из набора тонких параллельных металлических пластинок, укрепленных на металлическом основании*. Такие структуры находят себе применение в качестве замедляющих систем в линейных ускорителях, лампах бегущей волны [2], а также в некоторых типах однопроводных линий передачи [3].

2. Для определенности будем рассматривать распространение волн в положительном направлении оси z. Как известно, всякую цилиндрическую волну можно описать при помощи двух скалярных функций $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$, удовлетворяющих двухмерному уравнению Гельмгольца

$$\Delta_2\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix} + \varkappa^2\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix} = 0, \quad \varkappa^2 = k^2 - h^2, \quad k^2 = \omega^2\varepsilon\mu$$

и представляющих, соответственно, поля типа TM и TE

$$\left.\begin{aligned} &\quad TM\\ E_z &= A\varkappa^2\varphi\\ \mathbf{E}_{tr} &= -iAh\nabla\varphi\\ \mathbf{H}_{tr} &= -iA\,[\mathbf{z}_0\nabla\varphi]\end{aligned}\right\} e^{i(\omega t - hz)}, \qquad \left.\begin{aligned} &\quad TE\\ H_z &= B\varkappa^2\psi\\ \mathbf{H}_{tr} &= -iBh\nabla\psi\\ \mathbf{E}_{tr} &= iB\,\omega\mu\,[\mathbf{z}_0\nabla\psi]\end{aligned}\right\} e^{i(\omega t - hz)}. \tag{2}$$

Здесь индекс tr относится к поперечным составляющим полей, а A и B — амплитуды. Для φ и ψ в прямоугольной системе координат имеем:

$$\varphi = \begin{cases}\sin k_1 y e^{-k_2 x},\\ \cos k_1 y e^{-k_2 x};\end{cases} \quad \psi = \begin{cases}\cos k_1 y e^{-k_2 x},\\ \sin k_1 y e^{-k_2 x};\end{cases} \quad \varkappa^2 = k_1^2 - k_2^2. \tag{3}$$

Граничным условиям (1), вообще говоря, можно удовлетворить лишь суперпозицией полей типа TE и TM, что приводит к системе линейных однородных алгебраических уравнений относительно A и B. Приравнивая нулю детерминант этой системы, получаем уравнение для определения поперечных волновых чисел k_1 и k_2:

$$[\alpha^2 - \beta^2 + Q_1\beta]\,[Q_2(\alpha^2 - \beta^2) - \beta] = -(1 - \alpha^2 + \beta^2)\,Q_1\alpha^2, \tag{4}$$

где обозначено

$$\frac{Z_1}{Z_0} = iQ_1, \quad \frac{Z_2}{Z_0} = iQ_2; \quad Z_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}; \quad \alpha = \frac{k_1}{k}; \quad \beta = \frac{k_2}{k}; \quad \gamma = \frac{h}{k}. \tag{5}$$

Физический смысл имеют, очевидно, только такие решения уравнения (4), у которых $\mathrm{Re}\,\beta > 0$ (условие излучения) и которые, кроме того, приводят к отличной от нуля амплитуде поля. Последнее замечание необходимо потому, что хотя, например, у уравнения (4) имеются два корня, не зависящие от Q_1 и Q_2, а именно $\beta = \pm\alpha$, однако они соответствуют чисто поперечным ($\varkappa = 0$) главным ($h = k$) волнам, не существующим в рассматриваемой нами системе. Действительно, подстановка этих решений в (2) приводит к нулевой амплитуде суммар-

---

* Если период такой структуры (a) мал по сравнению с длиной волны в системе (λ_c), а плоскости пластин ориентированы параллельно оси y, то один из импедансов равен $Z_1 \simeq i\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\,\mathrm{tg}\,\Gamma l$ (где l — высота подъема пластинок над основанием, а Γ — постоянная распространения соответствующего типа волны между ними). Другой же импеданс Z_2 носит, вообще говоря, индуктивный характер и равен по порядку величины $\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\,\frac{a}{\lambda_c}$.

ного поля. Знание же двух корней уравнения (4) позволяет свести его к уравнению второго порядка

$$\beta^2 - 2M\beta - \alpha^2 - N + N\alpha^2 = 0, \tag{6}$$

где $M = \frac{1}{2}\left(Q_1 - \frac{1}{Q_2}\right)$, $N = \frac{Q_1}{Q_2}$. Таким образом,

$$\beta = M \pm \sqrt{M^2 + N + \alpha^2(1 - N)}. \tag{7}$$

Будем предполагать в дальнейшем поверхностный импеданс чисто реактивным, т. е. величины Q_1 и Q_2 действительными, различая три области изменений параметра N: а) $N < 1$; б) $N > 1$; в) $N = 1$ (изотропные граничные условия). Кроме того, будем рассматривать раздельно поля, не зависящие от поперечной координаты y (назовем их симметричными волнами, $\alpha = 0$), и поля, периодически меняющиеся по y (несимметричные волны, $\alpha \neq 0$)*. Условия периодичности по y могут быть реализованы, например, посредством ограничения плоскости $x = 0$ двумя идеально проводящими «боковыми» плоскостями $y = \pm \text{const}$. В общем случае и на этих плоскостях можно было бы потребовать выполнения граничных условий типа (1), т. е. решить задачу о распространении волн вдоль П-образной «импедансной» канавки.

3. Несимметричные волны; $N < 1$. При $N < 1$ подкоренное выражение в (7) всегда положительно**, так как по определению $M^2 + N > 0$. Поэтому β принимает только действительные значения, и, следовательно, постоянная распространения h может быть или действительной или чисто мнимой. В частности, действительным h, т. е. распространяющимся волнам, соответствуют β, удовлетворяющие неравенствам: $\beta > 0$, $\beta^2 > \alpha^2 - 1$. Значение $\beta = \alpha$, также попадающее в эту область, как уже было сказано, должно быть из нее исключено. На рис. 1 изображено разбиение плоскости $\alpha\beta$ на четыре области в зависимости от соответствующих им значений h. Переход из области $h^2 > 0$ в область $h^2 < 0$ происходит при критических значениях частоты, определяемых уравнениями***

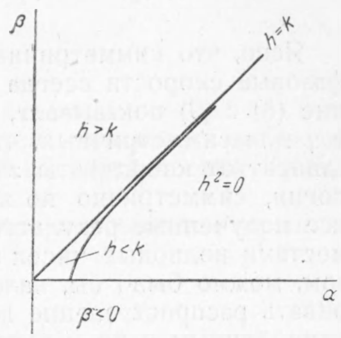

Рис. 1

$$\frac{k_1}{k} = \alpha_{\text{кр}}^{(1)} = 1 + Q_1^2; \quad \frac{k_1}{k} = \alpha_{\text{кр}}^{(2)} = 1 + \frac{1}{Q_2^2}. \tag{8}$$

Вблизи этих критических частот ($h \simeq 0$) рассматриваемые волны вырождаются в поле типа TM или TE по отношению к направлению y.

4. Несимметричные волны; $N > 1$. При $N > 1$ величина β, определяемая из выражения (7), может принимать также и комплексные значения. При этом, очевидно, оказывается комплексной и постоянная распространения h. В системах без диссипации энергии, к которым относится исследуемая нами реактансная плоскость, постоянная распространения может быть комплексной только, если соответствующая ей

---

* Такая терминология удобна тем, что плоская задача является предельным случаем задачи о распространении волн вдоль круглого «импедансного» цилиндра. При этом аксиально симметричные волны вырождаются в волны, не зависящие от y.

** Параметр α определяется условиями периодичности по y и может принимать значения $0 \leqslant \alpha \leqslant \infty$.

*** Необходимо учитывать, что в уравнении (8) Q_1 и Q_2, вообще говоря, зависят от частоты и от параметра α (например, металло-пластинчатая структура).

волна не переносит энергии. Как нетрудно показать, отсутствие переноса энергии волной в нашем случае связано с тем, что при комплексных h часть полного потока энергии, обусловленная компонентами E_x и H_y^*, компенсируется потоком энергии, обусловленным компонентами E_y и H_x^*. Для изотропных граничных условий $Q_1 = Q_2$ комплексные β отсутствуют, но уже при появлении малейшей анизотропности $N \gtrless 1$ может существовать такое $\alpha^2 \geqslant \alpha_0^2 = \frac{M^2+N}{N-1}$ *, при котором β комплексна. Интересно отметить, что при $Q_1 Q_2 = -1$ β комплексна для любых $\alpha \neq 0$.

5. Несимметричные волны; $N = 1$. В случае изотропных условий $Q_1 = Q_2 = Q$ выражение (7) значительно упрощается: $\beta_1 = Q$; $\beta_2 = -1/Q$, и поэтому для постоянной распространения h получим $h_1 = k\sqrt{1-\alpha^2+Q^2}$ $(Q > 0)$ и $h_2 = k\sqrt{1-\alpha^2+1/Q^2}$ $(Q < 0)$. Оба решения, очевидно, не существуют одновременно ни при каких Q.

6. Симметричные волны. В этом случае, аналогично, п. 5, из (7) имеем: $\beta_1 = Q_1$; $\beta_2 = -1/Q_2$. Первое из этих решений соответствует симметричной волне типа TM_0, а второе — волне TE_0. Отсюда вытекает $(\beta > 0)$, что волны TM_0 распространяются над поверхностями с индуктивным импедансом $(Q_1 > 0)$, а волны TE_0 — над поверхностями с емкостным импедансом $(Q_2 < 0)$ **. Постоянные распространения $\gamma = h/k$ для этих волн, соответственно, равны

$$\gamma_1^2 = 1 + \beta_1^2 = 1 + Q_1^2; \quad \gamma_2^2 = 1 + \beta_2^2 = 1 + \frac{1}{Q_2^2}. \tag{9}$$

Ясно, что симметричные волны не имеют критических частот и их фазовые скорости всегда меньше скорости света $(\gamma > 1)$. Сопоставление (8) с (9) показывает, что $\alpha_{кр}$ для несимметричных волн совпадает с γ для симметричных, что естественно, так как при $\alpha = \alpha_{кр}$ поле не зависит от координаты z $(\gamma = h/k = 0)$, или, согласно нашей терминологии, симметрично по z. В связи с этим необходимо заметить, что все полученные результаты остаются справедливыми при перестановке местами волновых чисел α и γ, поскольку $\alpha^2 + \gamma^2 = 1 + \beta^2$. Таким образом, можно было бы, наложив условие периодичности по z, рассматривать распространение волн вдоль y. В частности, если считать поле периодичным и по y и по z, то соотношения (6) и (5) позволяют определить собственные частоты прямоугольной полости, одна из стенок которой удалена, а на другой — противоположной удаленной — заданы граничные условия (1).

В заключение заметим, что при распространении волн над плоской металло-пластинчатой структурой с малым периодом a в нулевом приближении по a/λ_c импеданс Q_2 можно считать равным нулю, но $Q_1 \neq 0$. Для поверхности, идеально проводящей в направлении y и «импедансной» в направлении распространения z, может существовать только одна волна, для которой, как это очевидно из (7), $\beta = Q_1(1-\alpha^2)$.

Горьковский исследовательский физико-технический институт при Горьковском государственном университете

Поступило 21 IX 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] S. A. Schelkunoff, Electromagnetic Waves, 1943. [2] А. И. Ахиезер, Я. Б. Фейнберг, УФН, 44, № 3 (1951). [3] W. Rotman, P. I. R. E., 39, August (1951).

* Если, конечно, зависимость M и N от α допускает выполнение этого неравенства.

** Напомним, что Q_1 и Q_2 относятся к различным поляризациям векторов **E** и **H**. Поэтому в системе с идеально проводящими «боковыми» стенками ($y = \pm$ const) могут распространяться симметричные волны только типа TE_0. Если же на «боковых» стенках потребовать выполнения условия $H_{тан} = 0$, то, наоборот, будут существовать симметричные волны только типа TM_0.