Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXVII, № 4

ГЕОФИЗИКА

Член-корреспондент АН СССР А. Н. ТИХОНОВ и Н. В. ЛИПСКАЯ

О ВАРИАЦИЯХ ЗЕМНОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Настоящая статья посвящена изучению соотношений между суточными вариациями естественных электромагнитных полей Земли и является развитием и продолжением работы (1).

§ 1. Естественно считать, что компоненты земного электромагнитного поля, существующего в проводящем теле Земли, должны удовлетворять уравнениям Максвелла

$$-\mu\dot{\mathbf{H}} = \operatorname{rot}\mathbf{E}, \quad 4\pi\sigma\mathbf{E} = \operatorname{rot}\mathbf{H},$$

где все величины записаны в электромагнитных единицах, σ — проводимость Земли, μ — магнитная проницаемость, везде в дальнейшем принятая равной 1. Токами смещения в Земле мы пренебрегаем.

Для упрощения аналитической схемы будем считать Землю плоской. Учет сферичности Земли не представляет затруднений. Выписывая уравнение Максвелла более подробно и пренебрегая вертикальными составляющими электрического поля, получим систему:

$$\dot{H}_y = -\frac{\partial E_x}{\partial z}, \; \dot{H}_x = \frac{\partial E_y}{\partial z}; \; -4\pi\sigma E_x = \frac{\partial H_y}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial y}, \; -4\pi\sigma E_y = \frac{\partial H_z}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial z},$$

которая, в частности, должна удовлетворяться при $z = 0$.

Непосредственное использование этих уравнений для обработки наблюдений затруднительно, так как в них входят градиенты электромагнитных полей. Ограничиваясь в настоящем исследовании только периодическими вариациями естественных полей и пользуясь линейностью уравнений, представим изучаемые поля как сумму слагаемых вида $E = E_0 e^{i\omega t}$, $H = H_0 e^{i\omega t}$.

Пренебрегая возмущениями электромагнитного поля, вызываемыми горизонтальными неоднородностями Земли, естественно предположить, что составляющие поля (большого периода) могут быть представлены волной, распространяющейся с В на З со скоростью вращения Земли:

$$E = E_0(z)\, e^{i\omega\left(t + \frac{y - y_0}{v}\right)}, \qquad H = H_0(z)\, e^{i\omega\left(t + \frac{y - y_0}{v}\right)},$$

где v — линейная скорость вращения Земли на широте станции, что согласуется с наблюдениями, проводимыми на поверхности Земли.

Отсюда и из уравнений Максвелла получим уравнения для нахождения $E_0(z)$ и $H_0(z)$, определяющие эти функции по их значениям при $z = 0$ и условию при $z \to \infty$. Отсюда, в частности, следует, что вертикальные градиенты полей пропорциональны амплитудам этих полей при $z = 0$:

$$\left.\frac{\partial H_0(z)}{\partial z}\right|_{z=0} = H_0\Big|_{z=0} f_1(\omega, \sigma), \qquad \left.\frac{\partial E_0(z)}{\partial z}\right|_{z=0} = E_0\Big|_{z=0} f_2(\omega, \sigma),$$

где функции f_1 и f_2 зависят как от частоты ω, так и от характера изменения проводимости σ с глубиной.

Таким образом, при $z=0$ первая группа уравнений Максвелла может быть преобразована к виду:

$$i\omega H_{0y}(0) = -E_{0x}(0) f_2(\omega, \sigma), \quad i\omega H_{0x}(0) = E_{0y}(0) f_2(\omega, \sigma),$$

а вторая группа — к виду:

$$-4\pi\sigma E_{0x}(0) = H_{0y}(0) f_1(\omega, \sigma) - H_{0z}(0)\frac{\omega}{v},$$

$$-4\pi\sigma E_{0y}(0) = -H_{0x}(0) f_1(\omega, \sigma) + \frac{\partial H_{0z}(0)}{\partial x}.$$

Отметим еще раз, что функции f_1 и f_2 зависят не только от частоты, но и от проводимости σ — функции глубины.

Естественно поставить вопрос (см. ([1])) об определении функции $\sigma(z)$ на основании изучения соотношений между компонентами естественных электромагнитных полей при различных ω.

§ 2. Определим соотношения между компонентами электромагнитного поля в предположении, что электрический разрез Земли характеризуется простейшей структурой — слоем конечной проводимости σ, мощности l, лежащем на идеально проводящем основании. В этом случае на нижней границе слоя тангенциальные составляющие электрического поля и производные по нормали составляющих магнитного поля должны быть равны нулю: $E_{0x,y}(l) = 0$, $\partial H_{0x,y}(l)/\partial z = 0$ что определяет вид зависимости компонент полей от координаты z:

$$E_{0x,y}(z) = E_{0x,y}(0)\frac{\operatorname{sh}\gamma(l-z)}{\operatorname{sh}\gamma l}, \quad H_{0x,y}(z) = H_{0x,y}(0)\frac{\operatorname{ch}\gamma(l-z)}{\operatorname{ch}\gamma l},$$

где $\gamma = \sqrt{\frac{i\omega}{a^2} + \frac{\omega^2}{v^2}}$*, $a^2 = \frac{1}{4\pi\sigma}$.

На поверхности Земли (при $z=0$) вертикальные градиенты полей:

$$\left.\frac{\partial H_0(z)}{\partial z}\right|_{z=0} = -H_0(0)\operatorname{th}\gamma l, \quad \left.\frac{\partial E_0(z)}{\partial z}\right|_{z=0} = -E_0(0)\operatorname{cth}\gamma l.$$

Уравнения Максвелла на поверхности $z=0$ примут вид:

$$i\omega H_{0y}(0) = E_{0x}(0)\gamma\operatorname{cth}\gamma l, \quad i\omega H_{0x}(0) = -E_{0y}(0)\gamma\operatorname{cth}\gamma l;$$

$$4\pi\sigma E_{0x}(0) = H_{0y}(0)\gamma\operatorname{th}\gamma l + H_{0z}(0)\, i\frac{\omega}{v},$$

$$4\pi\sigma E_{0y}(0) = -H_{0x}(0)\gamma\operatorname{th}\gamma l - \frac{\partial H_{0z}(0)}{\partial x}.$$

Последнее уравнение содержит градиент функции H_{0z}, и в дальнейшем мы его не будем рассматривать. Из первых трех уравнений найдем соотношения между компонентами поля на земной поверхности

---

* В рассматриваемом случае величина γ определяется при решении уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial t},$$

где $u(y, z, t)$ есть горизонтальная компонента одного из исследуемых полей. Для рассматриваемых нами ниже станций скорость v имеет порядок $v \sim 4\cdot 10^4$ см/сек, частота первой гармоники суточного периода $\omega = 7{,}27\cdot 10^{-5}$ сек$^{-1}$, величина $1/a^2 = 4\pi\sigma\cdot 10^{-11}$, если $1/a^2$ выражена в электромагнитных единицах, а σ в $1/\Omega\cdot$метр. При подстановке этих величин видим, что первый член под корнем имеет порядок $\sim 10^{-14}\sigma$, второй член $\sim 3\cdot 10^{-18}$. Если предположить, что проводимость слоя σ имеет порядок не ниже 10^{-2}—10^{-3}, то при рассмотрении низких частот второй член под корнем в выражении γ может быть отброшен. Пренебрежение вторым слагаемым в γ эквивалентно пренебрежению членом $\partial^2 u/\partial y^2$ в уравнении для u, т. е. отсутствию горизонтальной кривизны поля. Работа ([1]) выполнена в этом предположении, как функции параметров электрического разреза Земли в пункте наблюдения:

$$\frac{E_{0x}(0)}{H_{0y}(0)}=\frac{i\omega}{\gamma}\,\mathrm{th}\,\gamma l,\qquad \frac{E_{0y}(0)}{H_{0x}(0)}=-\frac{i\omega}{\gamma}\,\mathrm{th}\,\gamma l; \tag{1}$$

$$\frac{E_{0x}(0)}{H_{0y}(0)}=a^2\gamma\,\mathrm{th}\,\gamma l+\frac{i\omega a^2}{v}\,\frac{H_{0z}(0)}{H_{0y}(0)}. \tag{2}$$

Переходя к общепринятым обозначениям амплитуд и фаз отдельных гармоник электромагнитных естественных полей, наблюдаемых на поверхности, получим следующую систему уравнений:

$$\frac{C_{\mathrm{N}}}{C_y}\,e^{i(\varphi_{\mathrm{N}}-\varphi_y)}=i\frac{\omega}{\gamma}\,\mathrm{th}\,\gamma\, l,\qquad \frac{C_{\mathrm{E}}}{C_x}\,e^{i(\varphi_{\mathrm{E}}-\varphi_x)}=-\frac{i\omega}{\gamma}\,\mathrm{th}\,\gamma\, l; \tag{3}$$

$$\frac{C_{\mathrm{N}}}{C_y}\,e^{i(\varphi_{\mathrm{N}}-\varphi_y)}=a^2\gamma\,\mathrm{th}\,\gamma l+\frac{i\omega a^2}{v}\,\frac{C_z}{C_y}\,e^{i(\varphi_z-\varphi_y)}, \tag{4}$$

где C_{N} и C_{E} — амплитуды гармоник, соответственно, северной и восточной составляющих электрического поля; φ_{N} и φ_{E} — их фазы; C_x, C_y, C_z — амплитуды гармоник северной, восточной и вертикальной составляющих магнитного поля; φ_x, φ_y и φ_z — их фазы.

Таблица 1

Значения σ и l, вычисленные по формуле (3) (l в сотнях километров, σ в $1/\Omega\cdot$м)

Пункт наблюдения	Дата	Гармон.	l	$\sigma\cdot10^2$
Тэксон	Среднее за 1933—1936 гг.	I	12,66	1,8
		II	12,29	1,0
		III	11,39	0,9
	1934 г.	I	11,8	1,8
		II	13,0	1,06
		III	10,6	1,06
		IV	9,6	0,9
Тэксон	1935 г.	I	10,9	2,2
		II	11,0	1,2
		III	9,6	1,1
		IV	8,7	1,0
Тойохара	1932—1934 гг.	I	12,3	2,8
		II	14,4	2,5
		III	12,0	1,0
Зуй	1944 г.	I	1,1	65,1
		II *	—	—
		III	1,2	85,8

* Не вычислено за малостью угла $\varphi_{\mathrm{N}}-\varphi_y$.

При дальнейших исследованиях мы пользуемся как непосредственно последними уравнениями, так и производными от них. Именно, исключая из первого уравнения (3) и уравнения (4) составляющую земного электрического поля, получим:

$$\frac{H_{0z}}{H_{0y}}=\frac{C_z}{C_y}\,e^{i(\varphi_z-\varphi_y)}=$$

$$=-\frac{i\,\mathrm{th}\,(\gamma\, l)}{\omega\gamma}\,v\left(\frac{i\omega}{a^2}-\gamma^2\right); \tag{5}$$

исключая горизонтальную составляющую магнитного поля, найдем:

$$\frac{H_{0z}}{E_{0N}}=\frac{C_z}{C_{\mathrm{N}}}\,e^{i(\varphi_z-\varphi_{\mathrm{N}})}=\frac{i\omega/a^2-\gamma^2}{\omega^2}\,v. \tag{6}$$

Уравнение (5) представляет соотношение между параметрами среды и составляющими одного только магнитного поля, что, благодаря достаточно широко развитой сети магнитных станций, расширяет область его возможного применения.

Уравнение (6) устанавливает соотношение между теми же параметрами Земли и составляющими H_z и E_x, что представляет значительный интерес, учитывая большую возможность в повышении точности наблюдений именно вертикальной составляющей магнитного поля. Наряду с этим, присутствие в обоих уравнениях малого множителя $i\omega/a^2-\gamma^2$ свидетельствует о неустойчивости определения параметров среды из этих уравнений. Так, в первом приближении ($\gamma^2=i\omega/a^2$) этот множитель равен нулю, что приводит к требованию $C_z = 0$, и уравнение вырождается в тождество.

В принятом нами приближении из уравнений (5) и (6) получаем:

$$\frac{C_z}{C_y} e^{i(\varphi_z - \varphi_y)} = i \operatorname{th}(\gamma l) \frac{\omega}{v^2 \gamma}; \qquad C_N = C_z v, \qquad \varphi_N = \varphi_z.$$

§ 3. Каждое из написанных комплексных уравнений может быть разделено на два действительных и, следовательно, каждое из них независимо от других определяет значения неизвестных параметров l и σ. Эти значения, полученные для разных гармоник и для наблюдений, выполненных в различные сроки, также не зависят друг от друга и дают лишний материал для сравнений.

В табл. 1 приведены значения l и σ, вычисленные по данным станций, выбор которых был обусловлен большей степенью электрической изотропности подстилающей среды по сравнению с другими станциями. (О степени изотропности можно судить по отношению модулей векторов поля, взятых в различных направлениях.) Точность наблюдений, произведенных стандартными установками, давала возможность воспользоваться только первыми 3—4 гармониками, начиная с периода суточного, полусуточного и т. д. Результаты вычисления, приведенные в табл. 1, говорят о большой устойчивости значений величины l, вычисляемой по формулам (3) и (4) с использованием составляющих полей E_x, H_y и H_z*.

Таблица 2

Значения линейной скорости вращения Земли, точной и вычисленной по формуле (6), и значения разности фаз $\varphi_z - \varphi_N$

Пункт наблюдения	Дата	v вычисл. в $\frac{\text{см}}{\text{сек}} \cdot 10^4$					$\varphi_z - \varphi_N$ в °				
		I	II	III	IV	общ. средн.	I	II	III	IV	общ. средн.
Тэксон, ист. скорость $v = 3{,}95 \cdot 10^4$ см/сек	1933 г.	1,3	3,2	4,98	6,48	3,99	+15	+ 4	− 9	+13	+6
	1934 г.	1,18	3,1	4,17	6,46	3,7	+ 6	0	−11	+ 2	−0,4
	1935 г.	1,04	2,78	3,75	6,06	3,41	+13	0	−11	+ 3	+1,15
	1936 г.	1,18	3,03	4,18	6,1	3,61	+ 4	− 3	−17	+ 5	−3
	Средн.	1,1	3,0	4,0	6,0	3,5	+10	0	−12	+8	+1,5
Тайохара, $v = 3{,}17 \cdot 10^4$ см/сек	1932—1934 гг.	2,0	3,6	6,9	6,6	4,8	−9	+12	+35	+43	+20
Зуй $v = 2{,}84 \cdot 10^4$ см/сек	1934 г.	0,4	0,6	0,7	—	0,57	+2	+32	+7	—	+14

Формула (6), устанавливающая связь между E_x и H_z, согласуется с наблюдениями по порядку величин; в табл. 2 приведены значения линейной скорости вращения Земли v для рассматриваемых станций, точные и вычисленные по формуле (6). Для обсерватории Тэксон и Тайохара вычисленные значения v совпадают по порядку с точными. Для Зуя они расходятся на порядок. Достаточно заметная зависимость отношения наблюдаемых величин C_N / C_z от частоты не учитывается в этом приближении теорией. В той же таблице даны значения разности фазовых углов $\varphi_z - \varphi_N$. Для всех станций они лежат в сравнительно узком интервале и в среднем близки к нулю, как это и следует из (6).

Поступило
7 X 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Н. Тихонов, ДАН, 73, № 2, 295 (1950).

* Вторая из формул (1) и формула (5) дают меньшую устойчивость, что, несомненно, связано с упрощенностью принятой схемы.