Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXVII, № 4

АСТРОНОМИЯ

К. СИТНИКОВ

О ВОЗМОЖНОСТИ ЗАХВАТА В ЗАДАЧЕ ТРЕХ ТЕЛ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 30 IX 1952)

В настоящей заметке строится система трех тел единичной массы, двигающихся под действием силы взаимного тяготения по закону Ньютона, в которой имеет место явление захвата, т. е. выполнены следующие условия:

1°. При $t \to -\infty$ расстояния между любыми двумя из данных трех тел стремятся к бесконечности.

2°. При $t \to +\infty$ расстояние между первым и третьим телом остается ограниченным, а расстояния между вторым и каждым из двух других тел бесконечно возрастают.

Возможность этого явления была обнаружена в 1947 г. О. Ю. Шмидтом ([1]) посредством численного интегрирования, чем было опровергнуто противоположное утверждение Шази (Chazy). Предлагаемое мною построение не пользуется численным интегрированием.

Мы пользуемся такими единицами измерения, при которых гравитационная постоянная равна 1. Построенная нами система зависит от трех числовых параметров c, R, n, связанных лишь неравенствами $c > 0$, $R > 1000c^2$, и осуществляет явление захвата при всех достаточно больших значениях параметра n (и любых заданных допустимых значениях двух других параметров c и R). В этой системе захват является устойчивым в том смысле, что во всякой системе, мало отличающейся от данной, осуществляющей захват, явление захвата также будет иметь место.

Искомая система строится так. В плоскости берем инерциальную систему координат XOY. При $t = 0$ тело (1) имеет координаты $-c/n$, 0 и компоненты скорости 0, n; тело (2) имеет координаты c/n, 0 и компоненты скорости 0, $-n$; тело (3) имеет координаты $-2R$, 0, а его скорость есть сумма двух векторов $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$, где $\mathbf{v}_1$ есть вектор длины $\sqrt{n^2 - n/2c}$ с угловым коэффициентом $4c\sqrt{n^2 - n/2c}$, образующий острый угол с положительным направлением оси абсцисс, а вектор $\mathbf{v}_2$ имеет компоненты 0, $1/\sqrt{R}$.

Доказательство того, что определенная этими данными система трех тел осуществляет явление захвата, проводится по следующему плану. Всю бесконечную протяженность времени разбиваем на три промежутка: $t < -4R/n$, $|t| \leqslant 4R/n$ и $t > 4R/n$. Наряду с определенной выше системой трех тел, которую называем основной, рассматриваем вспомогательную систему, отличающуюся от основной системы тем, что в ней тело (3) не взаимодействует с телами (1) и (2), т. е. движется по инерции, а тела (1) и (2) движутся под действием силы взаимного притяжения, т. е., если n достаточно велико, по гиперболам.

Основным фактом является следующий:

Теорема 1. *Если n достаточно велико, то при любом значении $t \neq 0$, принадлежащем отрезку $|t| \leqslant 4R/n$, положения каждого из тел в основной и вспомогательной системах отличаются по расстоянию меньше, чем на t^2/R^2, а их скорости отличаются* меньше, чем на $2|t|/R^2$.*

Доказательство этой теоремы опирается на следующую лемму, требующую некоторых вычислений.

Лемма. *Если n достаточно велико, то в любой момент времени t промежутка $|t| < 4R/n$, в который тела основной системы смещены по отношению к соответствующим телам вспомогательной системы меньше, чем на t^2/R^2, силы, действующие на тела основной и вспомогательной систем, отличаются меньше, чем на $2/R^2$ от сил, действующих на соответствующие тела вспомогательной системы.*

Для дальнейшего понадобятся некоторые обозначения. Пусть имеются два каких-нибудь тела (1) и (3) единичной массы, расстояние $r = r(t)$ между которыми при $t = 0$ равно $r(0) = r_0$, а скорость каждого из них (при $t = 0$) относительно их центра тяжести равна по модулю w_0; при этом $w_0^2 - 1/r_0 = h_0 < 0$.

Расстояние тела (2) от центра тяжести тел (1) и (3) обозначим через $\rho = \rho(t)$; предполагаем, что $\rho(0) < s_0$, $(d\rho/dt)_{t=0} > v_0$, где s_0 и v_0 — данные положительные числа. В этих обозначениях имеет место теорема 2.

Теорема 2. *Если $s_0 v_0^2 > 96$ и $\frac{16}{s_0^{3/2} v_0} + \frac{1}{s_0} < -h_0$, то при всех $t > 0$ справедливы неравенства*

$$r < s_0, \quad \rho > s_0 + \frac{v_0}{2} t.$$

Из теоремы 1 следует, что при достаточно большом n движение основной системы при $|t| \leqslant 4R/n$ сколь угодно мало отличается от движения вспомогательной системы. На основании этого доказывается, что (в том же предположении достаточно большого n) основная система при $t = 4R/n$ находится в состоянии, удовлетворяющем условиям теоремы 2, из которой следует, что при $t \to +\infty$ расстояние между телами (1) и (3) все время остается $< 8R$, тогда как расстояния между телом (2) и телами (1) и (3) стремятся к бесконечности.

Наконец, опять-таки при помощи теоремы 1, доказывается, что основная система при $t = -4R/n$ находится, если n достаточно велико, в условиях теоремы 3.3 Г. Ф. Хильми ([2]), откуда вытекает, что при $t \to -\infty$ взаимные расстояния всех трех тел стремятся к бесконечности.

Научно-исследовательский институт механики и математики
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова

Поступило
22 VII 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] О. Ю. Шмидт, ДАН, 58, № 2 (1947). [2] Г. Ф. Хильми, Проблема n тел в небесной механике и космогонии, изд. АН СССР, 1950, стр. 75.

* Здесь и в дальнейшем, оценивая отклонение двух векторов (скоростей, сил и т. п.), мы имеем в виду модуль их разности.