Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXVII, № 4

МАТЕМАТИКА

М. П. ЩЕГЛОВ

О ПОДПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯХ СРЕДНЕАРИФМЕТИЧЕСКИХ СУММ ЧЕЗАРО

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 30 IX 1952)

§ 1. Пусть задан некоторый числовой ряд $\sum\limits_{0}^{\infty} a_n$, где a_n— действительные числа, и пусть $s_n = \sum\limits_{\nu=0}^{n} a_\nu$ будут частные суммы ряда. Составим среднеарифметические суммы Чезаро

$$\sigma_n = \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^{n} s_\nu.$$

Возьмем произвольную подпоследовательность сумм Чезаро $\{\sigma_{n_m}\}$, где $0 \leqslant n_m < n_{m+1} \to \infty$, $m \to \infty$, $m = 1, 2, \ldots$

Определим числа:

$$\begin{aligned} &\underline{\lim}\, \sigma_n = d, \quad \overline{\lim}\, \sigma_n = D \quad (n \to \infty), \\ &\underline{\lim}\, \sigma_{n_m} = d', \quad \overline{\lim}\, \sigma_{n_m} = D' \quad (n_m \to \infty). \end{aligned} \tag{α}$$

Эти числа — конечные или бесконечные ($-\infty$, $+\infty$) — связаны общим соотношением

$$d \leqslant d' \leqslant D' \leqslant D. \tag{A}$$

Из соотношения (A) выделим, во-первых, равенства

$$d = d', \quad D = D' \tag{A_0}$$

и, во-вторых, группу неравенств следующих типов*:

$$\begin{array}{ll} 1.\ d = d' < D' < D. & \overline{1}.\ d < d' < D' = D. \\ 2.\ d < d' < D' < D. & \\ 3.\ -\infty = -\infty' < D' < D. & \overline{3}.\ d < d' < +\infty' = +\infty. \\ 4.\ d = d' = D' < D. & \overline{4}.\ d < d' = D' = D. \\ 5.\ d < d' = D' < D. & \end{array} \tag{A_1}$$

Ставится задача: при каких условиях имеют место соотношения (A_0) и (A_1)? В этом направлении получены следующие результаты.

* В этих соотношениях бесконечные числа явно выделены (3 и $\overline{3}$).

Теорема 1. *При условии*

(I) $a_n < o\left(\frac{1}{n}\right)$

и

(II) *для любой последовательности* $\{n_m\}$ *вида*

$$\frac{n_{m+1}}{n_m} = O(1)$$

всегда имеют место равенства (A_0).

Доказательство. Докажем, что

$$d = d'. \tag{1}$$

Возьмем последовательность сегментов $\{[n_m^0, n'_m]\}$, где $n_m^0 < n'_m$, $m = 1, 2, \ldots$, таких, что

$$\text{а)}\quad \sigma_{n_m^0} \to d; \qquad \text{б)}\quad \frac{n'_m}{n_m^0} = O(1); \qquad \text{в)}\quad \{n'_m\} \subset \{n_m\}. \tag{2}$$

Определим множества $E_0^{n'_m}$ и $E_1^{n'_m}$ тех значений n'_m, для которых удовлетворяются, соответственно, соотношения:

$$\sigma_{n'_m} \leqslant \sigma_{n_m^0}, \quad \sigma_{n'_m} > \sigma_{n_m^0}. \tag{3}$$

Равенство (1), очевидно, справедливо, если множество $E_0^{n'_m}$ бесконечно. Предположим, что множество $E_1^{n'_m}$ бесконечно, и пусть $n'_m \in E_1^{n'_m}$.

Имеем:

$$\sigma_{n'_m} = \frac{1}{n'_m + 1} \sum_{0}^{n'_m} s_\nu = \frac{n_m^0 + 1}{n'_m + 1} \sigma_{n_m^0} + \frac{1}{n'_m + 1} \sum_{n_m^0 + 1}^{n'_m} s_\nu.$$

Пользуясь формулой $s_n = \sigma_n + \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=1}^{n} \nu a_\nu$, соотношениями (I) теоремы и (2б), нетрудно показать, что последнее слагаемое (содержащее сумму) будет

$$< \frac{n'_m - n_m^0}{n'_m + 1} \sigma_{n_m^0} + o(1) \quad (n_m^0 \to \infty).$$

В итоге получаем

$$\sigma_{n'_m} < \sigma_{n_m^0} + o(1) \quad (n_m^0 \to \infty). \tag{4}$$

Из (2а) и (4) следует равенство (1).

Аналогично доказывается, что

$$D = D'.$$

Класс последовательностей $\{n_m\}$, определяемый условием (II), есть максимальный класс, так как имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть заданы произвольные числа d, D, d', D' (конечные или бесконечные), удовлетворяющие соотношению* (A), *и любая последовательность* $\{n_m\}$ *вида* $\overline{\lim\limits_{n_m\to\infty}} \frac{n_{m+1}}{n_m} = \infty$.

Найдется ряд $\sum\limits_0^\infty a_n$ *такой, что* $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$, *и для него имеют место* (α).

Теорема 3. *При условии*

(I) $a_n < O\left(\frac{1}{n}\right)$

и

(II) *для любой последовательности* $\{n_m\}$ *вида* $\frac{n_{m+1}}{n_m} \to 1$ *всегда имеют место равенства* (A_0).

Теорема 4. *При условии*

(I) $a_n < O\left(\frac{1}{n}\right)$

и

(II) *для любой последовательности* $\{n_m\}$ *вида* $\frac{n_{m+1}}{n_m} = O(1)$ *возможны из* (A) *только соотношения* (A_0) *и* (A_1).

Теоремы 3 и 4 доказываются аналогично теореме 1.

Теорема 4 допускает следующее уточнение:

Теорема 5. *Пусть заданы числа d, D, d', D', удовлетворяющие соотношению* (A_1) *(или* (A_0)*), и любая последовательность* $\{n_m\}$ *вида*

$$1 < \overline{\lim_{n_m\to\infty}} \frac{n_{m+1}}{n_m} < \infty.$$

Найдется ряд $\sum\limits_0^\infty a_n$ *такой, что* $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$, *и для него имеет место* (α).

Теоремы 2 и 5 доказываются конструктивно (построением).

§ 2. Существует следующая классическая теорема Харди — Ландау ([1]):

Если ряд $\sum\limits_0^\infty a_n$ *такой, что* $a_n < O\left(\frac{1}{n}\right)$ *и* σ_n *имеет конечный предел* S *при* $n \to \infty$, *то* $\sum\limits_0^\infty a_n = S$.

Полученные в § 1 результаты позволяют, в частности, расширить теорему Харди — Ландау следующим образом.

Пусть ряд $\sum\limits_0^\infty a_n$ *удовлетворяет условиям*: а) $a < o\left(\frac{1}{n}\right)$ *или* б) $a_n < O\left(\frac{1}{n}\right)$ *и* $\sigma_{n_m} \to S$ *(S — конечное число) при* $n_m \to \infty$ *по соответствующей последовательности, где* а$'$) $\frac{n_{m+1}}{n_m} = O(1)$ *или* б$'$) $\frac{n_{m+1}}{n_m} \to 1$. *Тогда* $\sum\limits_0^\infty a_n = S$.

Последовательности вида а$'$) *и* б$'$) *не допускают расширения.*

§ 3. Замечание 1. Если вместо σ_n и σ_{n_m} рассматривать взаимосвязь S_n и S_{n_m} под тем же углом зрения, то для них окажутся справедливыми, соответственно, теоремы 1—5.

Замечание 2. В том же аспекте (как был рассмотрен в § 1 метод «суммирования» Чезаро) можно исследовать и метод «суммирования» Пуассона, определяемый рядом $\sum\limits_0^\infty a_n e^{-nt}$, сходящимся при $t > 0$.

Для него сохраняются (с соответствующей заменой) теоремы 1—4; теорема 5 целиком не сохраняется. Подход к частному решению этих вопросов можно найти в работах ([2], [3]).

Поступило
5 VII 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ш. Валле-Пуссен, Курс анализа бесконечно малых, 2, 1933, стр. 145. [2] М. П. Щеглов, Матем. сборн., 14 (56), 1—2, 109 (1944). [3] М. П. Щеглов, там же, 28 (70), 2, гл. 1 (1951).