Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXVII, № 3

ФИЗИКА

И. М. ЛИФШИЦ и Л. С. ГУЛИДА

К ТЕОРИИ ЛОКАЛЬНОГО ПЛАВЛЕНИЯ

(Представлено академиком М. А. Леонтовичем 27 IX 1952)

При рассмотрении процесса плавления твердых тел обычно предполагается, что давления и температура остаются постоянными вдоль твердой фазы. В таких условиях перегрева не наблюдается, и при некоторой температуре процесс плавления, начиная с поверхности, захватывает всю твердую фазу. В случае наличия в твердом теле градиента температуры или неоднородного напряженного состояния можно ожидать появления внутри твердой фазы центров плавления с последующим их развитием в локальные области жидкой фазы. Пусть, например, внутри твердого тела находится источник тепла, а на его границе поддерживается такая температура, которая исключает возможность плавления с поверхности. Однако в отдельных участках внутри твердой фазы температура может быть настолько высокой, что станет возможным появление местных очагов плавления, возникающих флуктуационным путем.

Считая размеры зародышей малыми по сравнению с расстояниями, на которых заметным образом меняется температура T или напряжения σ_{ik}, достаточно будет рассмотреть возникновение одного жидкого зародыша в неограниченной твердой фазе, однородной в отношении T и σ_{ik}. Выбор потенциала φ, описывающего состояние системы, является, в известной степени, произвольным, так как характер условий, задаваемых на поверхности, бесконечно удаленной относительно зародыша, несущественен. Можно, например, задать на этой поверхности равномерное внешнее давление P_0 и описывать систему термодинамическим потенциалом Φ или фиксировать объем тела, характеризуя состояние свободной энергией F. Тогда $\Delta\Phi$ в первом случае и ΔF во втором случае будут совпадать. В дальнейшем, для определенности, будем предполагать, что фиксировано внешнее давление.

Представим $\Delta\Phi$ в виде суммы трех слагаемых:

$$\Delta\Phi = \Delta\Phi_{\text{тепл}} + \Delta\Phi_{\text{упр}} + \alpha\sigma; \tag{1}$$

$\Delta\Phi_{\text{тепл}}$ обусловлено изменением фазового состояния при $P_0 = 0$; $\Delta\Phi_{\text{упр}}$ связано с изменением энергии деформации и объема системы; α — коэффициент поверхностного натяжения на границе раздела твердой и жидкой фаз; σ — площадь поверхности зародыша.

Обозначая через T фактическую температуру твердой фазы, а через T_0 — температуру плавления при $P_0 = 0$ и разлагая $\Delta\Phi_{\text{тепл}}$ в ряд по степеням $T - T_0$, получим:

$$\Delta\Phi_{\text{тепл}} = -\frac{q}{T}(T - T_0)\,v, \tag{2}$$

где q — теплота плавления при $T = T_0$, рассчитанная на единицу объема, а v — объем жидкого зародыша.

$\Delta\Phi_{\text{упр}}$ запишем следующим образом:

$$\Delta\Phi_{\text{упр}} = \frac{P^2}{2k_2} v + \int\limits_{(V-v)} w\, dv + P_0 \Delta V - w_0 V, \tag{3}$$

где k_1 и k_2 — модули объемного сжатия твердой и жидкой фаз; P — давление, возникающее на поверхности жидкого зародыша; $w_0 = P_0^2 / 2k_1$ и w — плотности энергии деформации твердой фазы в начальном и конечном состояниях; V — начальный объем системы; ΔV — изменение объема всей системы, вызванное образованием зародыша.

w и P при данных значениях P_0 и объема v зависят от формы поверхности зародыша. Эта форма должна быть определена из условия минимума потенциала Φ. Таким образом, для фактического вычисления $\Delta\Phi$ при помощи соотношения (1) нужно решить сложную вариационную задачу.

Давление P на поверхности зародыша определяется из уравнения

$$P = -k_2 \left\{ \frac{v_{\text{ж}}(P) - v_{\text{ж}}(0)}{v_{\text{ж}}(0)} \right\} = -k_2 \left\{ \frac{\delta v}{v_{\text{т}}(0)} + \frac{\delta\rho}{\rho} \right\}; \tag{4}$$

здесь $v_{\text{ж}}$ и $v_{\text{т}}$ — объемы частиц, образующих зародыш в жидкой и твердой фазах, при соответствующих давлениях; $\rho_{\text{ж}}$ и ρ — плотности жидкой и твердой фаз; $\delta\rho = \rho_{\text{ж}} - \rho_{\text{т}}$. Предполагается, что $\delta\rho \ll \rho$. $\delta v = \delta v(P)$ можно трактовать как изменение объема полости, занятой жидким зародышем, при приложении к его границе равномерного давления P. δv определяется в результате решения основных уравнений теории упругости при граничных условиях:

$$\begin{aligned} \sigma_n &= -P \quad \text{на поверхности зародыша,} \\ \sigma_n &= -P_0 \quad \text{на бесконечно удаленной поверхности,} \end{aligned} \tag{5}$$

где σ_n — нормальное напряжение.

В изотропной твердой фазе, находящейся под равномерным внешним давлением, жидкий зародыш будет ограничен сферой. Радиальное перемещение u_R, удовлетворяющее условиям (5), равно [1]:

$$u_R = \left[a + \frac{b}{R^3} \right] R, \quad a = \frac{-P_0}{3k_1}, \quad b = \frac{(P - P_0) R_0^3}{4\mu}; \tag{6}$$

R_0 — радиус зародыша, μ — модуль сдвига.

Используя (3), (4) и (6), найдем, что

$$P = -k_2 \left\{ \frac{3u_{R_0}}{R_0} + \frac{\delta\rho}{\rho} \right\} = \frac{k_2 (4\mu + 3k_1) P_0 - 4 \frac{\delta\rho}{\rho} \mu k_1 k_2}{k_1 (4\mu + 3k_2)}, \tag{7}$$

$$\Delta\Phi = \left[\psi - \frac{q \Delta T}{T_0} \right] v + 4\pi R_0^2 \alpha, \tag{8}$$

где

$$\psi = \psi(P_0) = \frac{(k_2 - k_1)(4\mu + 3k_1) P_0^2}{2k_1^2 (4\mu + 3k_2)} - \frac{k_2 (4\mu + 3k_1) \delta\rho P_0}{k_1 (4\mu + 3k_2) \rho} + \frac{2\mu k_2}{4\mu + 3k_2} \left(\frac{\delta\rho}{\rho} \right)^2. \tag{9}$$

При помощи выражения (8) можно определить, при каких внешних давлениях возможно локальное плавление, если фиксирована температура. При заданном $\Delta T = T - T_0$ возможные значения P_0 определяются из условия:

$$\psi(P_0) - \frac{q}{T_0}\Delta T \leqslant 0. \qquad (10)$$

Кривые, соответствующие уравнению (10), — параболы, направленные выпуклостью вверх при $k_2 < k_1$ и выпуклостью вниз при $k_2 > k_1$.

Если $k_2 < k_1$, то локальное плавление возможно при давлении P_0, или большем, чем P_2, или меньшем, чем P_1, где P_1 и P_2 — корни уравнения (10).

Если $k_2 > k_1$, то локальное плавление возможно при $P_1 < P_0 < P_2$. Когда $\delta\rho < 0$ и $\Delta T \to 0$, корни $P_{1,2}$ могут быть отрицательными. В этом случае локальное плавление возможно только в условиях всестороннего растяжения. Если ΔT отрицательно и велико, то корни (10) будут комплексными. При таких температурах локальное плавление вообще невозможно.

Температура T, соответствующая началу локального плавления, определится также из уравнения (10), в котором нужно считать фиксированным P_0:

$$\Delta T_{\text{лок}} = \frac{\psi}{q} T_0. \qquad (11)$$

Разлагая в соотношении

$$\Phi_{\text{ж}}(P_0, T) - \Phi_{\text{тв}}(P_0, T) = 0 \qquad (12)$$

потенциалы каждой из фаз в ряд по степеням $T - T_0$ и P_0, получим зависимость температуры обычного плавления от давления:

$$\Delta T_{\text{обыкн}} = \frac{T_0}{q}\left\{\frac{k_2 - k_1}{2k_1k_2} P_0^2 - \left(\frac{\delta\rho}{\rho}\right) P_0\right\}. \qquad (13)$$

Кривые (11) и (13) — параболы с точкой касания при $P_0 = \dfrac{k_1k_2\delta\rho}{\rho(k_2 - k_1)}$, причем $\Delta T_{\text{лок}} - \Delta T_{\text{обыкн}} > 0$.

Таким образом, локальное плавление возникает в условиях перегрева твердой фазы (при фиксированных P_0 и T).

Размеры жидкого зародыша определяются из уравнения

$$\frac{d\Delta\Phi}{dR_0} = 0,$$

откуда

$$R_0 = \frac{-2\alpha}{\psi - \dfrac{\Delta T}{T_0} q}. \qquad (14)$$

Используя (8) и (14), найдем, что вероятность образования зародыша

$$W \sim e^{-\Delta\Phi/kT} = \exp\left\{\frac{-2\pi(2\alpha)^3}{3kT\left(\psi - \dfrac{\Delta T}{T_0} q\right)^2}\right\}. \qquad (15)$$

Выражение (8) для $\Delta\Phi$ получено в предположении, что деформации имеют чисто упругий характер. Если $k_2 - k_1$ или $\delta\rho$ становятся достаточно большими, то в твердой фазе появится пластическая прослойка *. Используя (3) и (4) и известное решение задачи о равновесии

---

* На необходимость учета наличия пластической прослойки внимание авторов обратил М. А. Леонтович.

упруго-пластической сферической оболочки [1], можно получить для определения давления P уравнение:

$$\left(\frac{k_2}{k_1}-1\right)P \mp \frac{k_2}{\alpha}\, e^{\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{P-P_0}{k_3}-1} - k_2\frac{\delta\rho}{\rho}=0, \tag{16}$$

а $\Delta\Phi_{\text{объем}}$ будет равно:

$$\Delta\Phi_{\text{объем}}=\frac{P^2}{2k_2}-\frac{P_0^2}{2k_1}+\frac{3}{8\mu}\left(P_1^2-P_0^2\right)+$$

$$+\left[\frac{P_1^2-P_0^2}{2k_1}+\frac{1}{\alpha_1}\left(\pm P-\frac{2k_3}{\sqrt{3}}\right)\exp\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{P-P_0}{k_3}-1\right)\mp\frac{P_0}{\alpha_1}\right]-\frac{\Delta T}{T_0}q, \tag{17}$$

где k_3 — предел текучести; $\alpha_1=\frac{2\sqrt{3}\,\mu k_1}{k_3(4\mu+3k_1)}$, $P_1=P_0\pm\frac{2k_3}{\sqrt{3}}$ есть значение P, при котором появляется пластическая прослойка. Верхний знак в (16) и (17) следует взять при $P-P_0>0$, нижний — при $P-P_0<0$.

Из рассмотрения соотношений (17) следует, что при $k_2=k_1$ и $\delta\rho\neq 0$ $\Delta T_{\text{лок}}-\Delta T_{\text{обыкн}}>0$, т. е. и с учетом пластического характера деформации локальное плавление начинается в условиях перегрева. Для металлов соотношение (12) дает завышенные значения температуры начала локального плавления. Можно указать и другие частные случаи, когда $\Delta T_{\text{лок}}-\Delta T_{\text{обыкн}}>0$. Без точного знания корня уравнения (16) нельзя, однако, утверждать, что это неравенство будет выполнено при любых значениях k_2, k_1 и $\delta\rho$.

В заключение отметим, что, с точки зрения гипотезы локального плавления, представляется возможным истолковать опыты С. Э. Хайкина и Н. П. Бине [2], которые изучали процесс плавления оловянных стержней в условиях искусственно создаваемого градиента температуры. В поликристаллических образцах наблюдалось плавление, начинающееся внутри твердой фазы, тогда как в монокристаллах олова наблюдался перегрев в 1,5—2°.

Харьковский государственный университет
им. А. М. Горького

Поступило
12 VII 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. В. Соколовский, Теория пластичности, §§ 18—19, 1946. [2] С. Э. Хайкин, Н. П. Бине, ДАН, 23, № 1 (1939).