

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

А. Б. ДАЦЕВ

О ПОЯВЛЕНИИ ФАЗЫ ПРИ ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧЕ СТЕФАНА

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 25 IX 1952)

Внескольких предшествующих работах (^{1, 2}) мы дали решение линейной задачи Стефана (задача замерзания) при довольно общих условиях при помощи развитого там метода, если начальные длины фаз конечны. Остался нерешенным вопрос о появлении новой фазы, решение которого даем здесь. Решение задачи о появлении фазы в одном частном случае дано Стефаном (^{3, 7}) и указано в более общем случае Хубером (⁴).

Пусть два плоские касающиеся слоя A_1 и A_2 , представляющие твердую и жидкую фазу одного вещества (например лед — вода), имеют общую нормаль OX для граничных плоскостей (для удобства снова будем говорить о стержнях A_1 и A_2 по OX). В начальный момент $t=0$ существует только одна фаза, например жидкая A_2 , между точками x_0 и x' , длиной $l = x' - x_0$, с начальной температурой $\Phi(x) > 0$, где принято для простоты, что температура замерзания равна нулю. Если $u_1(x, t)$, $u_2(x, t)$ обозначают температуры A_1 и A_2 , будем иметь:

$$a_i^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} = \frac{\partial u_i}{\partial t} \quad (i = 1, 2); \quad (1)$$

$$u_2(x, 0) = \Phi(x) > 0 \quad (x_0 < x < x'); \quad (2)$$

$$u_1(x_0, t) = \varphi_1(t) < 0; \quad u_2(x', t) = \varphi_2(t) > 0 \quad (t > 0); \quad (3)$$

$$u_1[s(t), t] = 0, \quad u_2[s(t), t] = 0,$$

где Φ , φ_1 , φ_2 — ограниченные интегрируемые функции; $\Phi(x)$ имеет производную в окрестности точки $x = x_0$ и $\varphi(t)$ имеет производную для значений t , близких к нулю.

Функция $s(t)$, определяющая место границы фаз, дается калориметрическим условием (условием Стефана):

$$s(t) = s(0) + e \int_0^t \left(k_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} - k_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} \right)_{x=s(t)} dt, \quad e = \frac{1}{\rho \sigma}, \quad s(0) = x_0. \quad (4)$$

Надо найти функции u_1 , u_2 , s , удовлетворяющие (1), (2), (3), (4). Обозначим через τ малый интервал времени и рассмотрим две следующие вспомогательные задачи:

1. Пусть $\bar{u}_1(x, t)$ — температура стержня, удовлетворяющая (1) ($i = 1$) для $(x_0 < x < \infty)$ с начальным значением нуль и удовлетворяющая условию на конце $u_1(x_0, t) = \bar{\varphi} = c$, где $\bar{\varphi}$ — значение $\varphi_1(t)$ для фиксированного t из интервала $(0, \tau)$. Тогда \bar{u}_1 имеет вид (5)

$$\bar{u}_1(x, t) = \frac{2\bar{\varphi}}{\sqrt{\pi}} \int_{b_1}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi, \quad b_1 = \frac{x - x_0}{2a_1 \sqrt{t}}. \quad (5)$$

2. Пусть $\bar{u}_2(x, t)$ — температура стержня, удовлетворяющая (1) ($i = 2$) и условиям

$$\bar{u}_2(x_0, t) = 0, \quad \bar{u}_2(x', t) = \varphi_2(t), \quad \bar{u}_2(x, 0) = \Phi(x) \quad (x_0 < x < x', t > 0).$$

\bar{u}_2 дается выражением (2, 6):

$$\bar{u}_2(x, t) = V_2(x, t) + W_2(x, t), \quad (6)$$

$$V_2(x, t) = \int_{x_0}^{x'} \Gamma_2(x, \xi, t) \Phi(\xi) d\xi, \quad (7)$$

$$\Gamma_2(x, \xi, t) = \frac{1}{2a_2 \sqrt{\pi t}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(e^{-\frac{(x-\xi-2nl)^2}{4a_2^2 t}} - e^{-\frac{(x+\xi-2x_0-2nl)^2}{4a_2^2 t}} \right), \quad (8)$$

$$W_2(x, t) = \frac{a_2^2}{t} \int_0^t \varphi_2(t - \tau) \frac{\partial \vartheta_3}{\partial x} \left(\frac{x' - x}{2t}, \frac{a_2^2 \tau}{t^2} \right) d\tau, \quad (9)$$

где ϑ_3 — известная тета-функция.

Как известно (6), когда $t \rightarrow 0$ ($x_0 < x < x'$), $V_2 \rightarrow \Phi(x)$, $W_2 \rightarrow 0$, а для $x = x'$ $W_2 = \varphi_2(t)$ ($t > 0$). Для небольших значений t ($0 < t \leq \tau$) в Γ_2 (8) остается конечным только член с $n = 0$, а сумма всех остальных членов дает величину $\alpha_1(x, t)$, где $\alpha_1 \rightarrow 0$ вместе с t . Посредством обычных подстановок V_2 (7) примет вид

$$V_2(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-b_2}^{\infty} \Phi(p) e^{-\xi^2} d\xi - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{b_2}^{\infty} \Phi(q) e^{-\xi^2} d\xi + \alpha_1(x, t) - \alpha_2(x, t), \quad (10)$$

$$b_2 = \frac{x - x_0}{2a_2 \sqrt{t}}, \quad p = 2a_2 \xi \sqrt{t} + x, \quad q = 2a_2 \xi \sqrt{t} - x + 2x_0.$$

В последних интегралах мы заменили верхние пределы, которые являются большими числами для малого τ , бесконечностью, в результате чего V_2 изменяется на величину $\alpha_2(x, t)$, где $\alpha_2 \rightarrow 0$ одновременно с t .

Обозначим через $\alpha_3(x, t)$ второй интеграл в (10), где $\alpha_3 \rightarrow 0$ одновременно с t . V_2 теперь напишется:

$$V_2(x, t) = R + \alpha_4, \quad (11)$$

$$R(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-b_2}^{\infty} \Phi(p) e^{-\xi^2} d\xi, \quad \alpha_4(x, t) = \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3,$$

а функция \bar{u}_2 (6):

$$\bar{u}_2(x, t) = R(x, t) + \alpha_5(x, t), \quad \alpha_5 = \alpha_4 + W_2, \quad (12)$$

где $\alpha \rightarrow 0$ вместе с t .

Обозначим через $\Psi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2} d\xi$ функцию Гаусса. Пусть \bar{x} — фиксированное значение x ($x_0 < \bar{x} < x'$). Если $\bar{\Phi} = \Phi(x_1)$ (x_1 фиксировано, $x_0 < x_1 \leq \bar{x}$), будем иметь из (11), используя теорему о средних значениях,

$$R(x) = \frac{\bar{\Phi}}{\sqrt{\pi}} \int_{-b_2}^{\infty} e^{-\xi} d\xi + \delta = \frac{\bar{\Phi}}{2} [1 + \Psi(b_2)] + \delta, \quad (11')$$

где $\delta(x, x_1, \bar{x}, t) \rightarrow 0$ вместе с t и $\bar{x} - x_0$.

При помощи найденных функций можно составить решение задачи Стефана (1)–(4) для малых значений t . Попробуем представить искомую функцию $s(t)$ (кривую $x = s(t)$) в виде

$$C \equiv x = x_0 + \lambda \sqrt{t}, \quad (13)$$

где λ является неизвестным параметром.

Как в частном случае появления фазы для бесконечного стержня ($\Phi = \text{const}$) (3, 7), можно составить выражения $u_1 = A_1 + B_1 \bar{u}_1$, $u_2 = A_2 + B_2 \bar{u}_2$ и определить постоянные A_1, B_1, A_2, B_2 через начальные условия и условия на концах. Таким образом найдем функции u_1 и u_2 , удовлетворяющие (1) ($i = 1, 2$):

$$u_1(x, t) = \frac{\bar{\Phi}}{\Psi\left(\frac{\lambda}{2a_1}\right)} \left[\Psi\left(\frac{\lambda}{2a_1}\right) - \Psi\left(\frac{x-x_0}{2a_1\sqrt{t}}\right) \right], \quad (14)$$

$$u_2(x, t) = \frac{\Phi}{1 - \Psi\left(\frac{\lambda}{2a_2}\right)} \left[-\Psi\left(\frac{\lambda}{2a_2}\right) + \Psi\left(\frac{x-x_0}{2a_2\sqrt{t}}\right) \right] + \alpha(x, t), \quad \alpha = \alpha_5 + \delta. \quad (15)$$

Легко проверить, что $u_1(x_0, t) = \bar{\Phi}$, $u_1(x_0 + \lambda\sqrt{t}, t) = 0$, $u_2(x_0 + \lambda\sqrt{t}, t) = \alpha(x_0 + \lambda\sqrt{t}, t)$; $u_2(x, 0) = \bar{\Phi} + \alpha(x, 0)$, $|\alpha| \ll 1$, т. е. u_1 удовлетворяет условиям (3), а u_2 удовлетворяет (2) и (3) ($x = s(t)$) приближенно. На основании известных свойств функций, входящих в \bar{u}_2 (6), нетрудно доказать, что $\alpha/t^m \rightarrow 0$ вместе с t , если m — целое положительное число, и что если $\varepsilon > 0$ дано, можно подобрать такое $\tau > 0$, чтобы $|\alpha| < \varepsilon$, если $0 < t \leq \tau$.

Из (14) и (15) найдем $u'_{1,x}$, $u'_{2,x}$ и выражения

$$\int_0^t \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \right)_{x_0 + \lambda\sqrt{t}, t} dt = \frac{-2\bar{\Phi}\sqrt{t}}{a_1\sqrt{\pi}\Psi(\lambda/2a_1)} e^{-\lambda^2/4a_1^2}, \quad (16)$$

$$\int_0^t \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} \right)_{x_0 + \lambda\sqrt{t}, t} dt = \frac{2\bar{\Phi}\sqrt{t}}{a_2\sqrt{\pi}[1 - \Psi(\lambda/2a_2)]} e^{-\lambda^2/4a_2^2} t\beta(t). \quad (16')$$

Подставим (13), (16), (16') в условие (4) и разделим на \sqrt{t} обе его части. Таким образом найдем:

$$\lambda = N(\lambda) - ek_2\beta(t)/\sqrt{t}, \quad (17)$$

$$N(\lambda) = \frac{2e}{\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{-k_1\bar{\Phi}e^{-\lambda^2/4a_1^2}}{a_1\Psi\left(\frac{\lambda}{2a_1}\right)} - \frac{x_2\bar{\Phi}e^{-\lambda^2/4a_2^2}}{a_2\left[1 - \Psi\left(\frac{\lambda}{2a_2}\right)\right]} \right\}. \quad (17')$$

Можно снова проверить, что $\beta/t^m \rightarrow 0$, где m — целое положительное, и что, если $\varepsilon > 0$ дано, можно найти $\tau \rightarrow 0$ так, что $|\beta|/\sqrt{t} < \varepsilon$, если $0 < t \leq \tau$. Таким образом, можно рассматривать уравнение $\lambda = N(\lambda)$ как произвольно заданное приближение уравнения (17) в зависимости от выбора τ .

Функция $N(\lambda)$, как разность монотонно убывающей функции λ (от ∞ до 0, если λ изменяется от 0 до ∞) ($\varphi < 0$) и монотонно возрастающей функции λ (от $2\Phi ek_2/a_2\sqrt{\pi}$ до ∞ , если λ изменяется от 0 до ∞), есть тоже монотонно убывающая функция λ , от $N(0) = \infty$ до $N(\infty) = -\infty$. Следовательно, уравнение $\lambda = N(\lambda)$ имеет только один положительный конечный корень λ_0 . Заменяя $\lambda = \lambda_0$ в (13), (14), (15), будем иметь функции s , u_1 , u_2 . Так как для фиксированного τ имеем $x_0 + \lambda_0\sqrt{t} < x < \bar{x}$ для выбранного значения \bar{x} , то вместе с $\bar{x} - x_0 \rightarrow 0$ будем иметь $|\Phi(x) - \bar{\Phi}| \rightarrow 0$ для интервала $x_0 < x < \bar{x}$, и $|\varphi(t) - \bar{\varphi}| \rightarrow 0$, когда $t \rightarrow 0$.

Мы нашли таким образом приближенное решение задачи Стефана, данное через s (13), u_1 (14) для $x_0 < x < x_0 + \lambda_0\sqrt{t}$, $0 < t \leq \tau$, и u_2 , данное через (15), для $x_0 + \lambda_0\sqrt{t} < x \leq \bar{x}$, $0 < t \leq \tau$, и через (6) или (12) для $x \leq x < \bar{x}$, $0 < t \leq \tau$. Для $\tau \rightarrow 0$ найденное решение стремится к точному решению задачи. В произвольно выбранный момент $t = \tau$ будем иметь две фазы A_1 и A_2 с длиной $l_1 = \Delta s = s(\tau) - s(0)$ и $l_2 = l - l_1$. Таким образом приходим к новой задаче Стефана с новыми неизвестными функциями $v_1(x, t)$, $v_2(x, t)$, $\sigma(t)$. Условия на концах те же (2). Начальное значение $\Phi_1(x)$ для $v_1(x, t)$ ($t = \tau$) получим из (14), $\Phi_1(x) = u_1(x, \tau)$, $x_0 < x < x_0 + \lambda_0\sqrt{\tau}$, а начальное значение $\Phi_2(x)$ для $v_2(x, t)$ будет, согласно (15) и (6), $\Phi_2(x) = u_2(x, \tau)$ ($x_0 + \lambda_0\sqrt{\tau} < x \leq \bar{x}$) и $\Phi_2(x) = \bar{u}_2(x, \tau)$ ($\bar{x} \leq x < \bar{x}'$). Тогда для $\tau < t \leq T$, где T произвольно, можно построить решение задачи Стефана известным способом, данным в (1, 2), разбивая интервал $T - \tau$ на n частей. Через граничный переход $n \rightarrow \infty$, $\tau \rightarrow 0$ получим точное решение задачи.

Из изложенного видно, что для небольшого интервала времени $0 < t \leq \tau$ толщина новой фазы увеличивается по параболическому закону $x = x_0 + \lambda\sqrt{t}$ (13) при очень общих условиях на концах или начальных условиях.

Как частный случай из полученного решения можно найти решение задачи, когда одна из начальных фаз A_2 имеет бесконечную толщину ($l = \infty$). Граничный переход $l \rightarrow \infty$ делается без затруднений. Тогда V_2 (7) становится равным V_2 (10), где $\alpha_1 - \alpha_2 = 0$, $W_2 = 0$. Для кривой замерзания $s(t)$ получим снова (13) $x = x_0 + \lambda\sqrt{t}$. Если одновременно $\Phi_2(x) = \text{const}$, $\varphi_1(t) = \text{const}$, $x_0 = 0$, получим известное решение для этого случая (3, 7) для любых $t > 0$.

Софийский университет
София, Болгария

Поступило
6 VIII 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А. Б. Дაცев, ДАН, 58, №4 (1947); Год. Соф. ун-та, 45 (1949). ² А. Б. Дაცев, ДАН, 74, №3 (1950); 75, №5 (1950); Год. Соф. ун-та, 46 (1950). ³ J. Stefan, Sitz. Ber. Ak. Wiss. Wien (1889). ⁴ A. Huber, Z. angew. Math. u. Mech., 19, H. 1 (1939). ⁵ Frank-Mises, Die Differentialgleich. der Physik, 2, Braunschweig, 1927. ⁶ G. Doetsch, Die Laplace Transformation, Berlin, 1937. ⁷ M. Brillouin, Ann. de l'Inst. H. Poincaré, 1, Paris, 1931.