Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXVII, № 3

МАТЕМАТИКА

В. А. ЯКУБОВИЧ

ОЦЕНКА ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ И КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 24 IX 1952)

Дано уравнение

$$x'' + P(t)\,x' + Q(t)\,x = 0, \tag{1}$$

где $P(t)$ и $Q(t)$ — периодические функции периода ω. Будем предполагать также, что $P(t)$, $P'(t)$ и $Q(t)$ интегрируемы по Лебегу.

Цель настоящей заметки — оценка характеристики показателей и, в частности, получение легко проверяемых достаточных условий для устойчивости по Ляпунову тривиального решения уравнения (1). В случае, если тривиальное решение уравнения (1) устойчиво по Ляпунову, т. е. если все решения уравнения (1) ограничены при $t \to \infty$, будем говорить просто, что уравнение (1) устойчиво.

Обычная подстановка $x = \exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t} P(t)\,dt\right) y$ приводит данное уравнение к виду

$$y'' + p(t)\,y = 0, \tag{2}$$

где

$$p(t) = Q(t) - \frac{P(t)^2}{4} - \frac{P'(t)}{2} \tag{3}$$

есть, согласно предположению, интегрируемая периодическая функция периода ω. Пусть

$$\int\limits_{t_0}^{t_0+\omega} P(t)\,dt = 2\mu_0. \tag{4}$$

Тогда $x = e^{\mu_0 t} e^{R(t)} y$, где $R(t)$ — непрерывная периодическая функция. Оценка характеристических показателей для уравнения (1) сводится таким образом к оценке характеристических показателей для уравнения (2). Последней задачей мы и будем заниматься.

Пусть $\mu > 0$. Множество функций $p(t)$, для которых $y(t) = O(e^{\mu t})$, обозначим C_μ. В функциональном пространстве C^3 (см. [3]) множество C_μ расположено так, как указано на рис. 1. C_μ есть замкнутое связное множество, граница которого $\Gamma^{(\mu)}$ состоит из счетного числа «поверхностей» $\Gamma_n^{(\mu)}$, определенных следующим образом. $p(t) \in \Gamma_n^{(\mu)}$, если соответствующее уравнение (2) допускает решение вида $y(t) = e^{\mu t} u(t)$, где $u(t+\omega) = (-1)^n u(t)$, и на $[t_0, t_0+\omega]$ $u(t)$ имеет ровно n нулей ($u(t_0) = u(t_1) = \cdots = u(t_{n-1}) = u(t_0+\omega) = 0$, $t_0 < \cdots < t_{n-1} < t_0+\omega$).

Обозначим $a = \max p(t)$, $b = \min p(t)$. Критерии ищем в виде:

$$a + \mu^2 \geqslant 0, \quad \int\limits_0^\omega (a - p(t))\, dt \leqslant \Phi(a, \mu); \tag{I}$$

$$b + \mu^2 \geqslant 0, \quad \int\limits_0^\omega (p(t) - b)\, dt \leqslant \Psi(b, \mu). \tag{II}$$

Условие $a + \mu^2 \geqslant 0$ означает, что $p(t) \equiv a \in C_\mu$. Второе условие в (I) означает, что «расстояние» от функции a до функции $p(t) \leqslant \Phi$. Аналогично — для критерия (II).

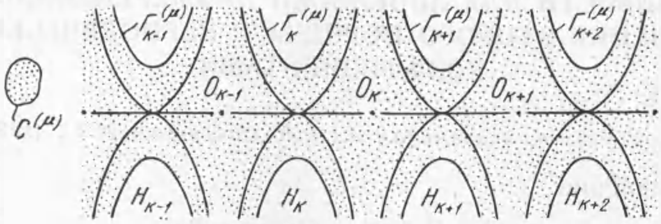

Рис. 1

Проведем все рассуждения для случая (I). Для случая (II) они проводятся аналогично. Легко видеть, что $\Phi(a, \mu) = \inf \int\limits_0^\omega (a - p(t))\, dt$ по всем $p(t) \in \Gamma^{(\mu)}$ и удовлетворяющим условию $p(t) \leqslant a$. Определим целое число n следующим образом:

$$\text{при } a \leqslant 0 \quad n = 0; \quad \text{при } a > 0 \quad n^2\pi^2/\omega^2 < a \leqslant (n+1)^2\pi^2/\omega^2. \tag{5}$$

По теореме сравнения из условия $p(t) \underset{\not\equiv}{\leqslant} a$ и $p(t) \in \Gamma^{(\mu)}$ следует, что $p(t) \in \Gamma_0^{(\mu)} \cup \Gamma_1^{(\mu)} \cup \ldots \cup \Gamma_n^{(\mu)}$. Обозначим $\Phi_k(a, \mu) = \inf \int\limits_0^\omega (a - p(t))\, dt$ по $p(t) \in \Gamma_k^{(\mu)}$, $p(t) \leqslant a$. Тогда

$$\Phi(a, \mu) = \min \Phi_k(a, \mu), \quad k = 0, 1, \ldots, n. \tag{6}$$

Определим $\Phi_k(a, \mu)$. Пусть сначала $n \geqslant 1$, т. е. $a > \pi^2/\omega^2$. Пусть $p(t) \in \Gamma_n^{(\mu)}$ и $y(t)$ — решение соответствующего уравнения, о котором шла речь выше. Очевидно, что $y(t)$ удовлетворяет условиям:

а) $y'(t)$ абсолютно непрерывна; y''/y суммируема; $a + y''/y \geqslant 0$;

б) $y(t_0) = \ldots = y(t_k) = 0$; $t_1 < \ldots < t_k = t_0 + \omega$; для прочих t $y(t) \neq 0$;

в) $y'(t_0 + \omega) = (-1)^k e^{\mu\omega} y'(t_0)$, $y'(t_i) \neq 0$.

Обратно, каждое $y(t)$, удовлетворяющее условиям а), б), в), определяет $p(t) = -y''/y \in \Gamma_k^{(\mu)}$ и $p(t) \leqslant a$. Поэтому $\Phi_k(a, \mu) = \inf \int\limits_{t_0}^{t_0+\omega} (a + y''/y)\, dt$ по всем y, удовлетворяющим а), б), в). Обозначим $\tau_i = (t_i, t_{i+1})$, $q_i = (-1)^i y'(t_i)$. По теореме сравнения $\tau_i > \frac{\pi}{\sqrt{a}}$. $\int\limits_{t_0}^{t_0+\omega} (a + y''/y)\, dt = \sum \int\limits_{\tau_i} (a + y''/y)\, dt$. Мы приходим таким образом к отысканию

$\inf \int_0^\tau (a + y''/y)\, dt$ по всем y, удовлетворяющим условиям а),

б′) $y(0) = y(\tau) = 0$; $y(t) \neq 0$ при $0 < t < \tau$ $(\tau > \pi/\sqrt{a})$;
в′) $y'(0) = 1$, $y'(\tau) = -q$.

Можно доказать, что inf достигается при $y = y_0$, где $y_0 = \frac{1}{\sqrt{a}} \sin \sqrt{a} t$ при $0 \leqslant t \leqslant \xi$; $y_0 = A e^{Bt}$ при $\xi \leqslant t \leqslant \eta$; $y_0 = \frac{q}{\sqrt{a}} \sin \sqrt{a} (\tau - t)$ при $\eta \leqslant t \leqslant \tau$. A, B, ξ и η подбираются из условий «склейки», т. е. из условий непрерывности y_0 и y_0'. Таким образом, $\inf \int_0^\tau (a + y''/y)\, dt = \int_0^\tau (a + y_0''/y_0)\, dt = (a + B^2)(\eta - \xi) = F(\tau, q)$.

После несложных выкладок можно убедиться, что $F(\tau, q) = \sqrt{a}[\sqrt{a}\tau - \pi + (\ln q)^2/\sqrt{a}\tau - \pi]$. $\int_{t_0}^{t_0+\omega} (a + y''/y)\, dt \geqslant \sum_{i=0}^{k-1} F(\tau_i, q_{i+1}/q_i) = \sqrt{a}\left[\sqrt{a}\omega - k\pi + \sum_{i=0}^{k-1} (\ln q_{i+1}/q_i)^2/\sqrt{a}\tau_i - \pi\right]$.

Из элементарного неравенства $\sum s_i^2/t_i \geqslant (\sum s_i)^2 / \sum t_i$ $(t_i > 0)$, которое достигается при $s_i = \mathrm{const} \cdot t_i$, получим

$$\Phi_k(a, \mu) = \sqrt{a}(\sqrt{a}\omega - k\pi + \mu^2\omega^2/\sqrt{a}\omega - k\pi). \tag{7}$$

Здесь $a > \pi^2/\omega^2$, $k = 1, 2, \ldots$ Легко убедиться, однако, что (7) остается справедливым и для $a \leqslant \pi^2/\omega^2$, $k = 0$. $\Phi(a, \mu)$ находим по (6). Очевидно, что

$$\text{при } a \leqslant \pi^2/\omega^2 \text{ или } a > \pi^2/\omega^2,\ \mu \geqslant \sqrt{a} \quad \Phi = \Phi_0 = (a + \mu^2)\,\omega. \tag{8}$$

При $a > \pi^2/\omega^2$, $\mu < \sqrt{a}$ определим целое k_0 из условия

$$\sqrt{a}\,\omega - k_0\pi \leqslant \mu\omega < \sqrt{a}\,\omega - (k_0 - 1)\,\pi. \tag{9}$$

Тогда

$$\text{при } n < k_0 \quad \Phi = \Phi_n; \qquad \text{при } n \geqslant k_0 \quad \Phi = \min(\Phi_{k_0-1}, \Phi_{k_0}). \tag{10}$$

Таким образом доказано:

Теорема 1. *Пусть* $\max p(t) = a$; *n определяется по формуле* (5), *μ — произвольное положительное число такое, что* $\mu^2 + a \geqslant 0$; $\Phi(a, \mu)$ *определяется по* (7) *и* (6) *или по* (7), (8), (9), (10).

Если $\int_0^\omega (a - p(t))\, dt \leqslant \Phi(a, \mu)$, *то для решений уравнения* (2) *справедлива оценка* $y = O(e^{\mu t})$, *т. е. характеристические показатели уравнения* (2) *либо чисто мнимы, либо действительны и* $\leqslant \mu$.

Если теорема применяется для оценки характеристических показателей, то μ следует находить из уравнения $\int_0^\omega (a - p(t))\, dt = \Phi(a, \mu)$.

Переходим к вопросу об устойчивости уравнения (1). Если $\mu_0 < 0$, то уравнение (1) неустойчиво, так как в противном случае все решения уравнения (2) должны были бы стремиться к нулю при $t \to \infty$, что невозможно. Если $\mu_0 = 0$, то устойчивость уравнения (1) равносильна устойчивости уравнения (2). Из теоремы 1 в этом случае следует утверждение:

Уравнение (2) *устойчиво, если* $a>0$ *и* $\int_0^\omega (a-p(t))\,dt < \Phi(a,0) =$

$= \sqrt{a}\,(\sqrt{a}\omega - n\pi)$.

Утверждение это, в свою очередь, является следствием критерия 3 в ([3]) *. При $\mu_0>0$ из теоремы 1 получаем:

Критерий устойчивости I. *Пусть для уравнения* (1) $p(t)$ *и* μ_0 *определяются по формулам* (3) *и* (4) *и* $\mu_0>0$. *Если для* $p(t)$ *и* $\mu=\mu_0$ *выполнены условия теоремы* 1, *то уравнение* (1) *устойчиво.*

В случае (II) все рассуждения аналогичны. При этом придется воспользоваться вариационной теоремой, которая имеется неявно в работе ([1]). Именно, пусть Y означает множество функций y, удовлетворяющих условиям: y' абсолютно непрерывна; y''/y суммируема; $-y''/y-b\geqslant 0$; $y(0)=y(\tau)=0$; $y(t)\neq 0$ при $0<t<\tau$; $y'(\tau)=$

$=-qy'(0)\neq 0$; $\tau<\pi/\sqrt{b}$. Тогда $\inf_{y\in Y}\int_0^\tau(-y''/y-b)\,dt = \sqrt{b}\,[q+q^{-1}+$

$+2\cos(\sqrt{b}\tau)]\,[\sin(\sqrt{b}\tau)]^{-1}$. При этом inf в множестве Y не достигается. Введем, как и раньше, целое число n:

$$n=0 \text{ при } b\leqslant 0; \qquad n^2\pi^2/\omega^2 \leqslant b < (n+1)^2\pi^2/\omega^2 \text{ при } b>0. \tag{11}$$

Теорема 2. *Пусть* $\min p(t)=b$, $b+\mu^2\geqslant 0$ *и* n *определяется*

по (11). *Если* $\int_0^\omega (p(t)-b)\,dt \leqslant \Psi(b,\mu) = \min_{k\geqslant n+1}\,(\operatorname{ch}\mu\omega/k + \cos\sqrt{b}\,\omega/k)\times$

$\times[\sin(\sqrt{b}\omega/k)]^{-1}$, *то характеристические показатели уравнения* (2) *либо чисто мнимы, либо действительны и* $<\mu$, *т. е. для решений уравнения* (2) *справедлива оценка* $y=O(e^{(\mu-\varepsilon)t})$ *для некоторого* $\varepsilon>0$.

Критерий устойчивости II. *Пусть для уравнения* (1) $p(t)$ *и* μ_0 *определяются по формулам* (3) *и* (4) *и* $\mu_0\geqslant 0$. *Если для* $p(t)$ *и* $\mu=\mu_0$ *выполнены условия теоремы* 2, *то уравнение* (1) *устойчиво.*

Для $\mu=\mu_0=0$ критерий II и теорема 2 становятся критерием устойчивости для уравнения (2), который является следствием, с одной стороны, более общего критерия Нейгауз и Лидского (критерий 2″ в ([2])), с другой — следствием критерия 2 в работе автора ([3]).

Если теорема 2 применяется для оценки характеристических показателей, то μ следует находить из уравнения $\int_0^\omega(p(t)-b)\,dt=\Psi(b,\mu)$.

Так например, полагая в теореме 2 $b=0$, получим следующее обобщение классического критерия А. Ляпунова:

Пусть в уравнении (2) $p(t)\geqslant 0$ *и* $I=\frac{\omega}{4}\int_0^\omega p(t)\,dt>1$. *Пусть*

$\mu=\frac{2}{\omega}\max\left[k\operatorname{ar\,ch}\left(\frac{1}{k}\sqrt{I}\right)\right]$ *по всем целым* k, $1\leqslant k<\sqrt{I}$. *Тогда* $y=O(e^{(\mu-\varepsilon)t})$ *для некоторого* $\varepsilon>0$.

Как следует из доказательства, сформулированные теоремы нельзя улучшить, не вводя дополнительных предположений.

В заключение автор выражает благодарность проф. В. В. Немыцкому за обсуждение результатов настоящей статьи.

Поступило
19 VIII 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] G. Borg, Ark. för Matem., Astr. och Fisik, 31 A, No. 1 (1944). [2] М. Г. Нейгауз, Б. В. Лидский, ДАН, 77, № 2 (1951). [3] В. А. Якубович, ДАН, 74, № 5 (1950).

* В работе ([3]) предполагалось, что $p(t)$ непрерывная функция. Так как inf достигается на разрывной функции, вместо знака $<$ там стоит знак $\leqslant$.