

Академик С. Л. СОБОЛЕВ

ОБ ОДНОМ РАЗНОСТНОМ УРАВНЕНИИ

В настоящей заметке мы рассмотрим уравнение

$$\frac{1}{4} \{ \omega_{m+1, n+1} + \omega_{m-1, n-1} + \omega_{m+1, n-1} + \omega_{m-1, n+1} - 4\omega_{m, n} \} = \begin{cases} 1, & m^2 + n^2 = 0; \\ 0, & m^2 + n^2 > 0 \end{cases} \quad (1)$$

для значений m и n во всей плоскости:

$$-\infty < m < +\infty, \quad -\infty < n < +\infty. \quad (2)$$

Мы построим решение этого уравнения, растущее на бесконечности как $\ln \sqrt{m^2 + n^2}$ и равное нулю при $m = n = 0$:

$$\omega_{00} = 0. \quad (3)$$

Такое решение, как вытекает из (1), является единственным.

Искомое решение имеет вид:

$$\omega_{m, n} = -\frac{1}{\pi^2} \oint_{|u|=1} \left(\oint_{|v|=1} \frac{u^m v^n - 1}{u^2 v^2 + u^2 + v^2 + 1 - 4uv} dv \right) du. \quad (4)$$

Мы укажем, как убедиться в справедливости этой формулы, а также вычислим решение в явном виде и оценим его асимптотическое поведение при m и $n \rightarrow \infty$.

Ниже мы докажем, что интеграл в правой части (4) имеет смысл при любых значениях m и n . Поэтому мы сможем подставить (4) в уравнение (1). Выполняя эту подстановку, будем иметь:

$$\begin{aligned} L\omega_{m, n} &= -\frac{1}{4\pi^2} \int_{|u|=1} \left(\int_{|v|=1} \frac{L(u^m v^n - 1)}{G(u, v)} dv \right) du = \\ &= -\frac{1}{4\pi^2} \oint_{|u|=1} \left(\oint_{|v|=1} u^{m-1} v^{n-1} dv \right) du = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{|u|=1} u^{m-1} du \int_{|v|=1} v^{n-1} dv. \end{aligned}$$

Отсюда следует справедливость уравнения (1).

Знаменатель подинтегрального выражения в формуле (4) может быть представлен в виде:

$$G(u, v) \equiv u^2 v^2 + u^2 + v^2 + 1 - 4uv = (u^2 + 1)(v - v_1)(v - v_2), \quad (5)$$

где

$$v_1 = \frac{i(u-i)}{u+i}, \quad v_2 = \frac{1}{v_1} = \frac{-i(u+i)}{u-i}. \quad (6)$$

При фиксированном u $G(u, v)$ имеет два корня. Эти корни оба равны единице по модулю, если u вещественно; при u из верхней полуплоскости $|v_1| < 1$, $|v_2| > 1$, а при u из нижней полуплоскости, наоборот, $|v_1| > 1$, $|v_2| < 1$.

Применяя к (4) теорему о вычетах, получим:

$$\begin{aligned} w_{m,n} &= \frac{1}{\pi} \int_{\substack{-\pi \leq \arg u \leq 0 \\ |u|=1}} \frac{u^m \left(-i \frac{u+i}{u-i} \right)^n - 1}{u^2 - 1} du - \\ &- \frac{1}{\pi} \int_{\substack{0 \leq \arg u \leq \pi \\ |u|=1}} \frac{u^m \left(\frac{i(u-i)}{u+i} \right)^n - 1}{u^2 - 1} du. \end{aligned} \quad (7)$$

Подинтегральная функция в первом члене регулярна во всей плоскости, кроме точки $u=i$, где она имеет полюс, так как корни знаменателя в точках $u = \pm 1$ сокращаются с корнями в числителе. Во втором из интегралов подинтегральная функция регулярна во всей плоскости, кроме точки $u=-i$, где она имеет полюс. Особенности в точках $u = \pm 1$ сокращаются.

Из формулы (4) следует:

$$w_{m,n} = w_{-m,n} = w_{m,-n} = w_{-m,-n} = w_{n,m} = w_{-n,m} = w_{n,-m} = w_{-n,-m}. \quad (8)$$

Таким образом, прямые $m=0$, $n=0$, $m=n$ и $m=-n$ являются осями симметрии для системы значений $w_{m,n}$. Формула (7) позволяет вычислять значения $w_{m,n}$. Мы имеем после элементарных преобразований:

$$w_{2k,0} = w_{0,2k} = w_{-2k,0} = w_{0,-2k} = \frac{4}{\pi} \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2k-1} \right). \quad (9)$$

Зная значения $w_{m,n}$ на координатных осях, а также симметричность этой функции, мы можем легко вычислить ее значения во всех остальных точках, пользуясь непосредственно уравнением (1).

Очевидно, что

$$w_{1,1} = w_{-1,1} = w_{1,-1} = w_{-1,-1} = 1. \quad (10)$$

В любой точке m, n функция $w_{m,n}$ состоит из суммы двух слагаемых:

$$w_{m,n} = w_{m,n}^I + w_{m,n}^{II}. \quad (11)$$

Здесь $w_{m,n}^I$ — число целое; $w_{m,n}^{II}$ — число трансцендентное вида r/π , где r рационально. Функции $w_{m,n}^I$ и $w_{m,n}^{II}$ обе растут при $\sqrt{m^2 + n^2} \rightarrow \infty$ значительно быстрее логарифма. $w_{m,n}^I$ есть некоторое частное решение уравнения (1), а $w_{m,n}^{II}$ — частное решение соответствующего однородного уравнения.

Из формулы (7) вытекает оценка поведения $w_{m,n}$ при больших значениях $\sqrt{m^2 + n^2}$.

Заметим прежде всего, что $\omega_{m, n}$ можно при $m > n$ дать вид:

$$\omega_{m, n} = \frac{4}{\pi} \Re \left\{ \int_0^1 \frac{u^m \left(\frac{i(u-i)}{u+i} \right)^u - 1}{u^2 - 1} du \right\}. \quad (12)$$

Оценивая формулу (12), введем вместо u новое переменное:

$$\psi = u^{\cos \alpha} \left(\frac{i(u-i)}{u+i} \right)^{\sin \alpha}, \quad (13)$$

где

$$\cos \alpha = \frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2}}, \quad \sin \alpha = \frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2}}. \quad (14)$$

Формула (12) в новых переменных получает вид:

$$\omega_{m, n} = \frac{4}{\pi} \Re \left\{ \int_0^1 \frac{\psi \sqrt{m^2 + n^2} - 1}{\psi^2 - 1} d\psi + \int_0^1 \psi \sqrt{m^2 + n^2} \left(\frac{du}{u^2 - 1} - \frac{d\psi}{\psi^2 - 1} \right) + \int_0^1 \left(\frac{d\psi}{\psi^2 - 1} - \frac{du}{u^2 - 1} \right) \right\}. \quad (15)$$

Выбирая путь интегрирования так, чтобы функция ψ была вещественна, и используя ограниченность функции $\left(\frac{du/d\psi}{u^2 - 1} - \frac{1}{\psi^2 - 1} \right)$, видим, что второе слагаемое в скобке стремится к нулю как $\frac{1}{\sqrt{m^2 + n^2}}$. Третье слагаемое, как показывают вычисления, чисто мнимо и равно $i\alpha$.

Оценивая первое слагаемое, будем иметь:

$$\left| \omega_{m, n} - \frac{2}{\pi} (C + \ln 2 + \ln \sqrt{m^2 + n^2}) \right| < \frac{A}{\sqrt{m^2 + n^2}},$$

где C — постоянная Эйлера.

Таким образом, порядок роста $\omega_{m, n}$ равен $\ln \sqrt{m^2 + n^2}$, что и требовалось доказать.

Математический институт
им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
24 IX 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ С. Л. Соболев, ДАН, 87, № 2 (1952).