

М. Н. ОЛЕВСКИЙ

О ФУНКЦИИ РИМАНА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + [\rho_1(x) + \rho_2(t)] u = 0$$

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 26 IX 1952)

1. Пусть $R_1(x, t; x_0, t_0)$ и $R_2(x, t; x_0, t_0)$ суть функции Римана, соответственно, для уравнений*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \rho_1(x) u = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \rho_2(t) u = 0. \quad (2)$$

Докажем, что функция Римана $R(x, t; x_0, t_0)$ для уравнения

$$Mu \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + [\rho_1(x) + \rho_2(t)] u = 0 \quad (3)$$

определяется формулой**

$$R(x, t; x_0, t_0) = R_1(x, t; x_0, t_0) + \int_{t-t_0}^{x-x_0} R_1(x, \xi; x_0, 0) \frac{\partial R_2(\xi, t; 0, t_0)}{\partial \xi} d\xi. \quad (4)$$

2. Ниже нам понадобятся следующие свойства функции Римана, отвечающей уравнению (1) (и, соответственно, (2)).

а) $R_1(x, t; x_0, t_0)$ есть функция x, x_0 и разности $t - t_0$:

$$R_1(x, t; x_0, t_0) = r_1(x, x_0, t - t_0), \quad (5)$$

и, аналогично,

$$R_2(x, t; x_0, t_0) = r_2(t, t_0, x - x_0). \quad (6)$$

* Мы предполагаем здесь, для простоты, что ρ_1 и ρ_2 — непрерывные функции в рассматриваемой области. Однако формула (4) справедлива и при менее жестких условиях, обеспечивающих единственность функции Римана.

** В обозначениях, основанных на свойствах (5) и (6), имеем

$$R(x, t; x_0, t_0) = r_1(x, x_0, t - t_0) + \int_{t-t_0}^{x-x_0} r_1(x, x_0, \xi) \frac{\partial r_2(t, t_0, \xi)}{\partial \xi} d\xi. \quad (4')$$

Из (4'), при помощи интегрирования по частям и равенств (13₁), непосредственно следует симметрия формулы относительно $r_1(x, x_0, t - t_0)$ и $r_2(t, t_0, x - x_0)$.

б) Функции $r_i(x, x_0, \tau)$ ($i = 1, 2$) являются четными по аргументу τ и симметричными относительно первых двух аргументов

$$r_i(x, x_0, -\tau) = r_i(x, x_0, \tau), \quad (7i)$$

$$r_i(x, x_0, \tau) = r_i(x_0, x, \tau). \quad (8i)$$

Для доказательства этих свойств запишем уравнение (1) в форме

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \tilde{\rho}_1(\xi - \eta) u = 0, \quad (1')$$

где $\xi = x + t$, $\eta = t - x$, $4\tilde{\rho}_1(z) = -\rho_1(z/2)$, и применим для отыскания функции Римана $G(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0)$, отвечающей уравнению (1'), метод последовательных приближений. Имеем

$$G(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0) = \sum_{k=1}^{\infty} G_k(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0), \quad G_1 = 1, \quad (9)$$

$$G_k(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0) = - \int_{\xi_0}^{\xi} dp \int_{\eta_0}^{\eta} \tilde{\rho}_1(p - q) G_{k-1}(p, q; \xi_0, \eta_0) dq \quad (k = 2, 3, \dots).$$

Возвращаясь к переменным x, t :

$$G_k(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0) = \bar{R}_k(x, t; x_0, t_0), \quad G(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0) = R_1(x, t; x_0, t_0),$$

получаем после замены p на $t_0 + p'$ и q на $t_0 - q'$:

$$\begin{aligned} & \bar{R}_k(x, t; x_0, t_0) = \\ & = \frac{1}{4} \int_{x_0}^{x+t-t_0} dp' \int_{x_0}^{x-t+t_0} \rho_1\left(\frac{p'+q'}{2}\right) \bar{R}_{k-1}\left(\frac{p'+q'}{2}, \frac{p'-q'}{2} + t_0; x_0, t_0\right) dq'. \end{aligned} \quad (10)$$

Так как $\bar{R}_1 = 1$, то \bar{R}_k ($k = 2, 3, \dots$), а следовательно, и R_1 суть функции от $t - t_0$, чем оправдано свойство (5).

Из (10) и (9) непосредственно следует и (7₁) (аналогично и (7₂)). Симметрия же $R_i(x, t; x_0, t_0)$ ($i = 1, 2$) относительно пар x, t и x_0, t_0 (вытекающая из самосопряженности уравнений (1) и (2)) в соединении с (5) и (6) приводит к справедливости свойств (8).

в) Имеют место следующие тождества:

$$\frac{\partial R_i}{\partial t} \Big|_{x=t+x_0-t_0} + \frac{\partial R_i}{\partial x} \Big|_{x=t+x_0-t_0} = 0, \quad (11i)$$

$$\left(\frac{\partial^2 R_2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 R_2}{\partial x \partial t}\right)_{x=t+x_0-t_0} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial R_2}{\partial x} \Big|_{x=t+x_0-t_0}\right) = -\rho_2(t). \quad (12)$$

В самом деле, согласно определению функций R_1 и R_2 имеем:

$$R_i(x, t; x_0, t_0) \Big|_{x-t=x_0-t_0} = 1, \quad (13i)$$

$$R_i(x, t; x_0, t_0) \Big|_{x+t=x_0+t_0} = 1. \quad (14i)$$

Дифференцируя тождество (13_i) по t , получим (11_i). Повторно дифференцируя (11₂) по t и учитывая уравнение (2), которому удовлетворяет R_2 , а также (13₂), мы получим (12).

3. Убедимся прежде всего в том, что функция $R(x, t; x_0, t_0)$, опре-

деляемая равенством (4), удовлетворяет уравнению (3). Для этого рассмотрим функцию

$$v = \int_{t-t_0}^{x-x_0} R_1(x, \xi; x_0, 0) \frac{\partial R_2(\xi, t; 0, t_0)}{\partial \xi} d\xi. \quad (15)$$

Покажем, что

$$Mv = -\rho_2(t) R_1(x, t-t_0; x_0, 0). \quad (16)$$

Дифференцируя (15) по x (учитывая (13₁) при $t_0 = 0$), имеем*:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \int_{t-t_0}^{x-x_0} \frac{\partial R_1}{\partial x} \frac{\partial R_2}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial R_2(x-x_0, t; 0, t_0)}{\partial x}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \int_{t-t_0}^{x-x_0} \frac{\partial^2 R_1}{\partial x^2} \frac{\partial R_2}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial^2 R_2(x-x_0, t; 0, t_0)}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial R_1}{\partial x} \frac{\partial R_2}{\partial \xi} \right)_{\xi=x-x_0}. \quad (17)$$

Дифференцируя же (15) по t , имеем:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \int_{t-t_0}^{x-x_0} R_1 \frac{\partial^3 R_2}{\partial \xi \partial t^2} d\xi - \left(R_1 \frac{\partial^2 R_2}{\partial \xi \partial t} \right)_{\xi=t-t_0} - \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(R_1 \frac{\partial R_2}{\partial \xi} \right)_{\xi=t-t_0} \right]. \quad (18)$$

Но из уравнения (2) для R_2 находим

$$\frac{\partial^3 R_2}{\partial \xi \partial t^2} = \frac{\partial^3 R_2}{\partial \xi^3} + \rho_2(t) \frac{\partial R_2}{\partial \xi}.$$

Подставляя из последнего равенства $\frac{\partial^3 R_2}{\partial \xi \partial t^2}$ в (18) и дважды интегрируя по частям, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = & \int_{t-t_0}^{x-x_0} \frac{\partial R_2}{\partial \xi} \frac{\partial^2 R_1}{\partial \xi^2} d\xi + \rho_2(t) \int_{t-t_0}^{x-x_0} R_1 \frac{\partial R_2}{\partial \xi} d\xi + \left(R_1 \frac{\partial^2 R_2}{\partial \xi^2} - \frac{\partial R_1}{\partial \xi} \frac{\partial R_2}{\partial \xi} \right) \Big|_{\xi=t-t_0}^{x-x_0} - \\ & - \left(R_1 \frac{\partial^2 R_2}{\partial t \partial \xi} \right)_{\xi=t-t_0} - \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(R_1 \frac{\partial R_2}{\partial \xi} \right)_{\xi=t-t_0} \right]. \end{aligned}$$

Составляя выражение Mv , мы замечаем, что, согласно (1), интегральные члены в сумме дают нуль, и мы имеем, в силу (13₁):

$$\begin{aligned} Mv = & \left(\frac{\partial R_2}{\partial \xi} \right)_{\xi=x-x_0} \left[\left(\frac{\partial R_1}{\partial x} \right)_{\xi=x-x_0} + \left(\frac{\partial R_1}{\partial \xi} \right)_{\xi=x-x_0} \right] + \left(\frac{\partial R_2}{\partial \xi} \right)_{\xi=t-t_0} \left[\frac{\partial}{\partial t} (R_1)_{\xi=t-t_0} - \right. \\ & \left. - \left(\frac{\partial R_1}{\partial \xi} \right)_{\xi=t-t_0} \right] + (R_1)_{\xi=t-t_0} \left[\left(\frac{\partial^2 R_2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 R_2}{\partial \xi \partial t} \right)_{\xi=t-t_0} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial R_2}{\partial \xi} \right)_{\xi=t-t_0} \right], \end{aligned}$$

откуда, учитывая (11₁) и (12), находим (16). А так как

$$MR_1(x, t; x_0, t_0) = \rho_2(t) R_1(x, t; x_0, t_0), \quad (1')$$

то, в силу (5), мы обнаруживаем

$$M(v + R_1) = 0, \quad (19)$$

что и требовалось доказать.

* Здесь и ниже в п. 3 аргументы функций R_1 и R_2 (если они не обозначены) предполагаются такими же, как и в (15).

4. Докажем, что функция R , определяемая по формуле (4), удовлетворяет условиям

$$R(x, t; x_0, t_0)|_{x=t=x_0=t_0} = 1, \quad (20)$$

$$R(x, t; x_0, t_0)|_{x+t=x_0+t_0} = 1. \quad (21)$$

Выполнение условия (20) в силу (13₁) очевидно. Справедливость же условия (21) вытекает из (14₁) и из того, что подинтегральная функция в (4), в силу (5), (6) и (7), является нечетной функцией ξ . Таким образом теорема, сформулированная в п. 1, доказана*.

5. Пользуясь формулой (4), можно записать функцию Римана в явной форме для ряда уравнений, для которых она, насколько мы знаем, не была известна.

Так например, мы можем написать функцию Римана для уравнения**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{a}{x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{b}{t} \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad (22)$$

сводящегося подстановкой $u = x^p t^q w$, $2p = -a$, $2q = b$ к

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \left(\frac{\alpha}{x^2} + \frac{\beta}{t^2} \right) w = 0, \quad \alpha = \frac{a}{2} \left(1 - \frac{a}{2} \right), \quad \beta = \frac{b}{2} \left(1 + \frac{b}{2} \right), \quad (23)$$

а также для уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \left[\alpha \left(\frac{V\bar{k}}{\sin V\bar{k}x} \right)^2 + \beta \left(\frac{V\bar{l}}{\sin V\bar{l}t} \right)^2 \right] u = 0 \quad (24)$$

(обращающегося в (23) при k и l , устремленных к нулю), для которого функция Римана при $\beta = 0$ имеет вид

$$r(x, x_0; t - t_0) = P_m \left(\frac{\cos V\bar{k}(t - t_0) - \cos V\bar{k}x \cos V\bar{k}x_0}{\sin V\bar{k}x \sin V\bar{k}x_0} \right), \quad \alpha = -m(m+1), \quad (25)$$

где P_m — функция Лежандра первого рода со значком m . Отметим также уравнение***

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \left[\alpha \left(\frac{V\bar{k}}{\sin V\bar{k}x} \right)^2 + \beta \right] u = 0, \quad (26)$$

которое при $4\alpha = (n-1)(3-n)$, $4\beta = (n-1)^2 k$ играет основную роль при решении задачи Коши для аналога волнового уравнения в n -мерном пространстве постоянной кривизны k (2). Функция Римана для него (учитывая таковую для телеграфного уравнения и (25)) может быть записана, используя обозначение (25), следующим образом:

$$r(x, x_0, t - t_0) + \int_{t-t_0}^{x-x_0} r(x, x_0, \xi) \frac{\partial J_0(V\bar{\beta}V\bar{\xi}^2 - (t-t_0)^2)}{\partial \xi} d\xi. \quad (27)$$

Поступило
20 IX 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Б. М. Левитан. Усп. матем. наук, 6, 120 (1951). ² М. Н. Олевский, ДАН, 46, № 1 (1945). ³ М. Б. Капилевич, Матем. сборн., 30, 11 (1952).

* Заметим, что симметрия $R(x, t; x_0, t_0)$ относительно пар x, t и x_0, t_0 вытекает из (7_i) и (8_i).

** При $a = -b$ оно встречается в (1).

*** Для уравнения (26) при $k \rightarrow 0$ функция Римана (в другой форме) была получена в (8).