Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXVII, № 3

МАТЕМАТИКА

Е. Б. ДЫНКИН

СВЯЗЬ МЕЖДУ ГОМОЛОГИЯМИ КОМПАКТНОЙ ГРУППЫ ЛИ И ЕЕ ПОДГРУПП

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 25 IX 1952)

Пусть $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{G}^*$ — компактные группы Ли и φ — гомоморфное отображение $\mathfrak{G}$ в $\mathfrak{G}^*$. В работе изучаются соответствующие отображению φ гомоморфизмы групп Бетти $\mathfrak{G}$ в группы Бетти $\mathfrak{G}^*$. Доказывается, что в широком классе случаев гомоморфизм φ определяется своими гомологическими характеристиками однозначно с точностью до автоморфизмов $\mathfrak{G}^*$ (теорема 4). Для случая, когда группы $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{G}^*$ являются классическими *, даются формулы, выражающие эти гомологические характеристики через систему весов соответствующего линейного представления (теоремы 5, 6 и 7). Задачу настоящей работы можно также описать как задачу изучения связи между гомологиями компактной группы Ли и ее подгрупп. Полученные формулы могут быть полезны и при изучении гомологий однородных пространств. Например, известная теорема Самельсона ([2]) делает весьма актуальной задачу выделения в компактных группах Ли негомологичных нулю подгрупп; из результатов настоящей работы, в частности, вытекают формулы, позволяющие решить вопрос о гомологичности нулю подгрупп классических групп по системам весов задающих эти подгруппы линейных представлений.

В работе рассматриваются исключительно цепи с целыми коэффициентами и под гомологиями всюду подразумеваются слабые гомологии.

1. Цикл y компактной группы Ли $\mathfrak{G}$ назовем **примитивным**, если равен нулю интеграл по y от внешнего произведения $\omega'\omega''$ любых двух замкнутых дифференциальных форм ненулевой степени. Набор примитивных циклов $y_1, y_2, \ldots, y_n$ назовем **каноническим**, если каждый примитивный цикл группы $\mathfrak{G}$ гомологичен однозначно определенной целочисленной линейной комбинации циклов $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Л. С. Понтрягин ([3]) построил в каждой из классических групп некоторый набор циклов и показал, что все циклы могут быть выражены через них (в смысле гомологий) посредством введенной им операции умножения и операции сложения.

Теорема 1. *Наборы циклов, построенные Л. С. Понтрягиным, являются каноническими наборами примитивных циклов для классических групп.*

---

* Мы называем классическими группу $SU(n)$ унитарных матриц порядка n с определителем 1, группу $O(n)$ ортогональных вещественных матриц порядка n с определителем 1 и группу $Sp(n)$ унитарных симплектических матриц порядка n. (Употребительны также обозначения $A_{n-1} = SU(n)$, $B_n = O(2n+1)$, $C_n = Sp(2n)$ и $D_n = O(2n)$). Случай, когда группы $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{G}^*$ принадлежат серии $SU(n)$, был исследован нами ранее в работе ([1]).

Мы будем обозначать понтрягинские циклы в группе A_{n-1} через $P_2, P_3, \ldots, P_n$; в группе B_n — через $\Sigma_2, \Sigma_4, \ldots, \Sigma_{2n}$; в группе C_n — через $T_2, T_4, \ldots, T_{2n}$; в группе D_n — через $\Sigma_2, \Sigma_4, \ldots, \Sigma_{2(n-1)}, \Omega_n$ (в этих обозначениях индекс k связан с размерностью m соответствующего цикла формулой $m = 2k - 1$).

2. Пусть G — алгебра Ли, соответствующая группе $\mathfrak{G}$, и пусть H — картановская подалгебра алгебры $\mathfrak{G}$. Внутренние автоморфизмы G, переводящие в себя H, индуцируют на H некоторую конечную группу линейных преобразований S ([4]). Каждая однородная форма η, заданная на H и инвариантная относительно группы S, может быть распространена, и притом единственным образом, в однородную форму той же степени, определенную на всей алгебре G и инвариантную относительно всех внутренних автоморфизмов G. Пусть распространенная форма имеет вид $b_{i_1 i_2 \ldots i_k} x^{i_1} x^{i_2} \ldots x^{i_k}$, где $x^1, x^2, \ldots, x^N$ — координаты элемента x из G, $b_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ — симметрический тензор. Сопоставим тензору $b_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ тензор $a_{i_1 i_2 \ldots i_{2k-1}}$ посредством формулы

$$a_{i_1 i_2 \ldots i_{2k-1}} = c^{\alpha_1}_{(i_1 i_2} c^{\alpha_2}_{i_3 i_4} \ldots c^{\alpha_{k-1}}_{i_{2k-3} i_{2k-2}} b_{i_{2k-1}) \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{k-1}}$$

(c^{i}_{jk} обозначает тензор структурных констант алгебры G; по индексам, заключенным в круглые скобки, берется альтернирование). Кососимметрический тензор $a_{i_1 i_2 \ldots i_{2k-1}}$ однозначно определяет некоторую двухсторонне инвариантную дифференциальную форму $\hat{\eta}$ на группе $\mathfrak{G}$. Таким образом, каждой однородной форме η, заданной на H и инвариантной относительно S, сопоставляется двухсторонне инвариантная дифференциальная форма $\hat{\eta}$.

Назовем инвариантную дифференциальную форму **примитивной**, если равен нулю ее интеграл по понтрягинскому произведению любых двух циклов положительной размерности*.

Теорема 2. *Отображение $\eta \to \hat{\eta}$ отображает множество всех инвариантов группы S на множество всех примитивных дифференциальных форм группы $\mathfrak{G}$. При этом $\hat{\eta}$ равно нулю тогда и только тогда, когда η может быть выражено через инварианты меньшей степени посредством операций умножения и сложения.*

Следствие. Если $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ — образующие кольца инвариантов** группы S, то формы $\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2, \ldots, \hat{\eta}_n$ образуют базис среди всех примитивных дифференциальных форм.

3. Мы скажем, что набор примитивных дифференциальных форм $\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2, \ldots, \hat{\eta}_n$ двойственен набору примитивных циклов $y_1, y_2, \ldots, y_n$, если $\int\limits_{y_i} \hat{\eta}_j = 0$ при $i \neq j$; $\int\limits_{y_i} \hat{\eta}_j = 1$ при $i = j$.

Теорема 3. *Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — система весов простейшего линейного представления группы $SU(n)$. Положим $\rho_k = c_k \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j^k$, где $c_k = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!\,(k-2)!}{(4\pi i)^k (2k-1)(2k-3)!}$. Тогда примитивные дифференциальные*

---

* Если размерность цепи y отлична от степени формы ω, то мы считаем, по определению, что $\int\limits_{y} \omega = 0$.

** Связь между инвариантами группы S и примитивными дифференциальными формами была впервые установлена А. Вейлем и К. Шевалле ([5]). Эта связь была обнаружена нами независимо от Вейля и Шевалле и использована в работе ([1]) до того, как в Москве были получены первые сообщения об их результатах.

формы $\hat{\rho}_2, \hat{\rho}_3, \ldots, \hat{\rho}_n$ образуют набор, двойственный набору примитивных циклов $P_2, P_3, \ldots, P_n$. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — система положительных весов простейшего линейного представления B_n, C_n или D_n. Положим

$$\sigma_{2k} = c_{2k} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^{2k}, \quad \tau_{2k} = 2c_{2k} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^{2k}, \quad \omega_n = -c_n n \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n.$$

Тогда наборы дифференциальных форм, двойственные каноническим наборам циклов, указанным в конце n° 1, имеют вид: для B_n: $\hat{\sigma}_2, \hat{\sigma}_4, \ldots, \hat{\sigma}_{2n}$; для C_n: $\hat{\tau}_2, \hat{\tau}_4, \ldots, \hat{\tau}_{2n}$; для D_n: $\hat{\sigma}_2, \hat{\sigma}_4, \ldots, \hat{\sigma}_{2(n-1)}, \hat{\omega}_n$.

4. Будем говорить, что гомоморфизмы φ_1 и φ_2 группы $\mathfrak{G}$ в группу $\mathfrak{G}^*$ гомологичны, если для любого цикла y группы $\mathfrak{G}$ $\varphi_1(y) \sim \varphi_2(y)$ (запись $y \sim z$ означает, что y гомологично z в $\mathfrak{G}^*$).

Теорема 4. *Пусть $\mathfrak{G}$ — полупростая компактная группа, $\mathfrak{G}^*$ — одна из классических групп. Если гомоморфизмы φ_1 и φ_2 $\mathfrak{G}$ в $\mathfrak{G}^*$ гомологичны и хотя бы один из них неприводим (т. е. $\varphi_i(\mathfrak{G})$ является неприводимым семейством матриц), то существует автоморфизм A группы $\mathfrak{G}^*$ такой, что для всех $g \in \mathfrak{G}$ $\varphi_1(g) = A\varphi_2(g)$.*

Теорема 5. *Пусть $y_1, y_2, \ldots, y_n$ и $z_1, z_2, \ldots, z_N$ — канонические наборы примитивных циклов, соответственно, для групп $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{G}^*$. Пусть φ — гомоморфизм $\mathfrak{G}$ в $\mathfrak{G}^*$. Тогда*

$$\varphi(y_k) \sim \sum_{j=1}^{N} d(y_k, z_j) z_j, \tag{1}$$

где $d(y_k, z_j)$ — целые неотрицательные числа ($d(y_k, z_j) = 0$, если y_k и z_j имеют разные размерности). Если два гомоморфизма φ_1 и φ_2 группы $\mathfrak{G}$ в $\mathfrak{G}^*$ приводят к одинаковым числам $d(y_k, z_j)$, то они гомологичны. Для того, чтобы подгруппа $\varphi(\mathfrak{G})$ группы $\mathfrak{G}^*$ была гомологична нулю в $\mathfrak{G}^*$, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы $d(y_k, z_j)$ был меньше n.

Замечание 1. Если $\mathfrak{G}^*$ — простая группа, отличная от D_{2k}, то циклы, входящие в канонический набор $z_1, z_2, \ldots, z_N$, имеют попарно различные размерности. Поэтому в сумме, стоящей в правой части формулы (1), отлично от нуля не более одного слагаемого. Если $\mathfrak{G} = D_{2k}$, то число отличных от нуля слагаемых не превышает двух.

Замечание 2. Теорема справедлива и для неоднозначных гомоморфизмов $\mathfrak{G}$ в $\mathfrak{G}^*$, которые естественно возникают из локальных гомоморфизмов, когда группа $\mathfrak{G}$ неодносвязна.

5. Пусть $\mathfrak{G}$ — компактная группа Ли и H — картановская подалгебра ее алгебры Ли. Пусть $\xi(h)$ и $\eta(h)$ — многочлены, заданные на H и инвариантные относительно группы S. Условимся писать $\xi \equiv \eta$, если $\xi - \eta$ можно представить в виде суммы членов, каждый из которых равен произведению по меньшей мере двух инвариантов ненулевой степени.

Теорема 6. *Пусть $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — канонический набор примитивных циклов полупростой компактной группы $\mathfrak{G}$ и $\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2, \ldots, \hat{\eta}_n$ — двойственный ему набор примитивных дифференциальных форм.*

Гомоморфизм φ группы $\mathfrak{G}$ в $SU(N)$ можно рассматривать как линейное представление φ. Пусть $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_N$ — система весов этого представления. Тогда

$$c_k \sum_{j=1}^{N} \Lambda_j^k \equiv \sum_{j=1}^{n} d(y_j, P_k) \eta_j. \tag{2}$$

Гомоморфизм φ группы $\mathfrak{G}$ в B_N, C_N или D_N можно трактовать как ортогональное или симплектическое линейное представление φ. Пусть $\Lambda_1 \geqslant \Lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \Lambda_N$ — старшие N весов этого представления. Тогда:

в случае B_N $$c_{2k}\sum_{j=1}^{N}\Lambda_j^{2k} \equiv \sum_{j=1}^{n} d(y_j, \Sigma_{2k})\,\eta_j \quad (k=1, 2, \ldots, N); \tag{3}$$

в случае C_N $$2c_{2k}\sum_{j=1}^{N}\Lambda_j^{2k} \equiv \sum_{j=1}^{n} d(y_j, \mathrm{T}_{2k})\,\eta_j \quad (k=1, 2, \ldots, N); \tag{4}$$

в случае D_N $$c_{2k}\sum_{j=1}^{N}\Lambda_j^{2k} \equiv \sum_{j=1}^{n} d(y_j, \Sigma_{2k})\,\eta_j \quad (k=1, 2, \ldots, N-1); \tag{5}$$

$$-c_n n\Lambda_1\Lambda_2\ldots\Lambda_N \equiv \sum_{j=1}^{n} d(y_j, \Omega_n)\,\eta_j.$$

Замечание. Если гомоморфизм φ является r-значным отображением (ср. замечание 2 к теореме 5), то значения $d(y_j, z)$, полученные по формулам (2)—(5), следует умножить на r.

Теорема 7. *Пусть $\mathfrak{G}$ — компактная полупростая группа Ли, φ — ее линейное неприводимое представление размерности N (т. е. гомоморфизм в группу A_{N-1}). Пусть $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — канонический набор примитивных циклов группы $\mathfrak{G}$ и $\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2, \ldots, \hat{\eta}_n$ — двойственный ему набор примитивных дифференциальных форм. Обозначим через Σ^+ систему всех положительных корней группы $\mathfrak{G}$ и через q — число элементов системы Σ^+.*

Если цикл y_j имеет размерность $2k-1$, то

$$d(y_j, \mathrm{P}_k) = B_{\eta_j}(\Lambda + g) - NB_{\eta_j}(g),$$

где Λ — старший вес представления φ, $g = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Sigma^+}\alpha$ и функция $B_{\eta_j}(\mathrm{M})$ ($\mathrm{M}\in H$) определяется из соотношения

$$\sum_{\eta_i} B_{\eta_i}(\mathrm{M})\,\eta_i(h) \equiv \frac{k!}{(k+q)!}\sum_{s\in S}\frac{(\mathrm{M}, sh)^{k+q}}{\prod_{\alpha\in\Sigma^+}(\alpha, sh)}$$

(левую и правую части этого сравнения надлежит рассматривать как формы от h, суммирование в левой части распространяется на все элементы η_i, имеющие степень k).

Теоремы 6 и 7 в соединении с теоремой 3 позволяют вычислять числа $d(y, z)$ для любого гомоморфизма классической группы в другую классическую группу. Например, для естественного гомоморфизма φ группы $O(n)$ в $SU(n)$ находим $\varphi(\Sigma_{2k}) \sim 2\mathrm{P}_{2k}$ $\left(k = 1, 2, \ldots, \left[\frac{n-1}{2}\right]\right)$. Для естественного гомоморфизма ψ $Sp(2n)$ в $SU(2n)$ находим $\psi(\mathrm{T}_{2k}) \sim \mathrm{P}_{2k}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Для неприводимого полуспинорного представления φ' группы $O(2h)$ в группу $SU(2^{n-1})$ получаем $\varphi'(\Omega_n) \sim n!\mathrm{P}_n$ и т. д.

Поступило
25 IX 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Е. Б. Дынкин, ДАН, 85, № 4 (1952). [2] H. Samelson, Ann. of Math., 42, 1091 (1941). [3] Л. С. Понтрягин, Матем. сборн., 6, 389 (1939). [4] H. Weyl, Math. Z., 1, 23, 271 (1925); 2, 24, 328 (1926); пер. в Усп. матем. наук, 4, 201 (1938). [5] C. Chevalley, Proc. Intern. Congress Math., Cambridge, Mass., 2, 21 (1950); Am. Math. Soc., Providence, 1952.