

М. Л. ЦЕТЛИН

**ПРИМЕНЕНИЕ МАТРИЧНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ К СИНТЕЗУ
РЕЛЕЙНО-КОНТАКТНЫХ СХЕМ**

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 25 VII 1952)

Алгебраические методы анализа и синтеза последовательно-параллельных релейно-контактных схем были впервые разработаны В. И. Шестаковым⁽¹⁾. А. Г. Лунц в своих работах^(2,3) применил к релейно-контактным схемам самого общего вида матричный метод анализа, но его методика оказывается черезчур громоздкой для решения наиболее важных в приложениях задач синтеза релейно-контактных схем.

В настоящей заметке развит простой и имеющий прозрачный физический смысл матричный метод, оказавшийся эффективным для решения ряда задач по синтезу релейно-контактных схем.

Будем обозначать буквами x, y, \dots контакты, замкнутые при значениях независимых переменных x, y, \dots , равных 1, а через \bar{x}, \bar{y}, \dots — контакты, замкнутые при значениях независимых переменных x, y, \dots , равных нулю. Все независимые переменные задаются соответствующими реле, переключателями и т. п. и принимают лишь два значения: 0 и 1.

1. Рассмотрим электрическую схему \bar{A} , имеющую $p+1$ входную шину и $p+1$ выходную. Занумеруем те и другие числами $0, 1, \dots, p$. Если напряжение (напряжение отсчитывается относительно некоторого общего провода, не входящего в схему, например, относительно земли) подается на i -ю входную шину, мы будем говорить, что i -я координата вектора входа* равна 1. Таким образом, вектор входа записывается в виде $\Lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_p)$, где $\lambda_i = 1$, если напряжение подается на i -ю входную шину, и $\lambda_i = 0$ в противном случае. Аналогично, мы будем полагать k -ю координату вектора выхода равной 1, если напряжение поступает на k -ю входную шину схемы \bar{A} , и равной 0 в противном случае. Вектор выхода может быть записан в виде $M = (\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_p)$, где координаты μ_k принимают значения 0 либо 1.

Назовем суммой двух векторов $\Lambda_1 = (\lambda_0^{(1)}, \lambda_1^{(1)}, \dots, \lambda_p^{(1)})$ и $\Lambda_2 = (\lambda_0^{(2)}, \lambda_1^{(2)}, \dots, \lambda_p^{(2)})$ вектор $\Lambda_3 = (\lambda_0^{(3)}, \lambda_1^{(3)}, \dots, \lambda_p^{(3)})$ такой, что $\lambda_i^{(3)} = \lambda_i^{(1)} + \lambda_i^{(2)}$. В последнем выражении сложение понимается в булевском смысле (см. (1)). Далее, назовем вектор простым, если равна 1 не более чем одна его координата. Введенные нами векторы образуют множество \mathfrak{M} , замкнутое относительно операции сложения, каждый элемент которого может быть разложен на сумму простых векторов.

Возвратимся к рассмотрению схемы \bar{A} . Сопоставим ей матрицу $A = \|a_{ik}\|$, построенную следующим образом. Если между i -й шиной входа и k -й шиной выхода имеется (идеальная) проводимость, то a_{ik}

* Мы пользуемся словом «вектор» ввиду внешнего сходства совокупности чисел, определяющих напряжения на входе схемы, с обычными векторами в $(p+1)$ -мерном линейном пространстве.

полагается равным 1, если же проводимость между i -й входной и k -й выходной шинами равна 0, то a_{ik} полагается равным 0. Если вектор входа есть $\Lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_p)$, то k -я координата вектора выхода может быть вычислена по формуле

$$v_k = \sum_{\alpha=0}^p \lambda_{\alpha} a_{\alpha k}. \quad (1)$$

В этой формуле сложение понимается в булевском смысле. Физически выражение (1) означает, что напряжение попадает на k -ю выходную шину, если оно подано хотя бы на одну соединенную с ней входную шину. Формула (1) может быть сокращенно переписана в виде

$$M = \Lambda A. \quad (2)$$

Матрица A задает во множестве \mathfrak{M} преобразование, являющееся в некотором смысле аналогичным линейному преобразованию в $(p+1)$ -мерном линейном пространстве.

Если схема \tilde{C} получена последовательным (каскадным) соединением схем \tilde{A} и \tilde{B} (мы запишем это в виде равенства $\tilde{C} = \tilde{A}\tilde{B}$), то ей отвечает матрица $C = AB$

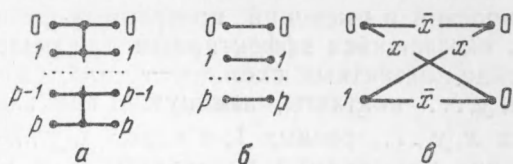


Рис. 1

$$c_{ik} = \sum_{\alpha=0}^p a_{i\alpha} b_{\alpha k} \quad *. \quad (3)$$

В случае, если число входных и выходных шин различается на q , в матрицу дописывается q столбцов или строк, составленных из

нулей. Можно также пользоваться прямоугольными матрицами, у которых числа строк и столбцов отличаются на q .

Приведем несколько примеров, иллюстрирующих матричную запись схем (см. рис. 1):

а) закорачивающая схема

$$D_{p+1} = \begin{pmatrix} 11 \dots 1 \\ 11 \dots 1 \\ \dots \dots \\ 11 \dots 1 \end{pmatrix},$$

б) схема с замкнутыми одноименными шинами входа и выхода

$$E_{p+1} = \begin{pmatrix} 10 \dots 0 \\ 01 \dots 0 \\ \dots \dots \\ 00 \dots 1 \end{pmatrix},$$

в) коммутатор

$$B_2(x) = \begin{pmatrix} \bar{x} & x \\ x & \bar{x} \end{pmatrix}.$$

Условимся называть схему \tilde{A} простой, если каждая шина входа замкнута не более чем с одной шиной выхода. Преобразование A переводит простой вектор входа в простой вектор выхода. Схема, полученная путем каскадного соединения простых схем, также является простой. Простой схеме \tilde{A} соответствует простая матрица A , имеющая в каждой строке не более чем один равный 1 элемент. Простые

* Сложение понимается в булевском смысле.

матрицы образуют полугруппу по умножению, определенному формулой (3). В настоящей заметке мы ограничимся задачами синтеза простых релейно-контактных схем. Приведем две таких задачи.

2. Построим схему $\tilde{C}_m(x_1, x_2, \dots, x_n)$ сложения по произвольному модулю m для n переменных x_1, \dots, x_n определив ее следующим образом. Пусть r из n переменных x_1, \dots, x_n равны 1. Тогда напряженные переходят с k -й шины входа на s -ю шину выхода ($s = 0, 1, \dots, m-1$), причем s является суммой по модулю m чисел r и k . Символически определение схемы сложения по модулю m записывается в виде

$$\Lambda C_m = M; \quad \mu_{k+r} = \lambda_k \quad (4)$$

где r — число равных 1 переменных, знак $+$ означает сложение по модулю m и Λ и M — простые векторы. Схема $\tilde{C}_m(x_1, \dots, x_n)$ является простой и имеет по m входных и выходных шин $(0, 1, \dots, m-1)$. Схеме $\tilde{C}_m(x_1, x_2, \dots, x_n)$ отвечает матрица m -го порядка $C_m(x_1, \dots, x_n)$. Будем искать ее в виде произведения n одинаковых матриц

$$C_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n B_m(x_i). \quad (5)$$

В силу определения схемы $C_m(1, 0, \dots, 0) = C_m(0, 1, \dots, 0) = \dots = C_m(0, 0, \dots, 1)$. Полагаем $B_m(0) = E_m$. Тогда, если r из n переменных x_1, x_2, \dots, x_n отличны от нуля, то $C_m = B_m^r(1)$. По определению сложения по модулю m , имеет место следующее соотношение:

$$B_m^{r+m}(1) = B_m^r(1). \quad (6)$$

Этому соотношению удовлетворяет преобразование циклической перестановки простых векторов, переводящее простой вектор, у которого i -я координата равна 1, в простой вектор с $(i+1)$ -й координатой, равной 1. Вектор, у которого 1 равна $(m-1)$ -я координата, переводится в вектор, у которого равна 1 координата с номером 0. Такому преобразованию отвечает матрица

$$B_m(1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Объединяя выражения для $B_m(0)$ и $B_m(1)$, мы получаем

$$B_m(x) = \begin{pmatrix} \bar{x} & x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \bar{x} & x & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x \\ x & 0 & 0 & \dots & \bar{x} \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Схема $\tilde{B}_m(x)$ приводится на рис. 2.

Пусть теперь число X_i записано в двоичной системе счисления и x_{iq} — цифра, стоящая в q -м разряде слагаемого X_i . По смыслу двоичной системы счисления, единице q -го разряда соответствует 2^q единиц 0-го разряда. Поэтому, если единице 0-го разряда мы сопоставляем матрицу $B_m(1)$, то единице q -го разряда следует сопоставить матрицу $B_m^{2^q}(1)$.

Таким образом, если задано $n(q+1)$ -значных чисел X_1, X_2, \dots, X_n , то матрица схемы сложения по модулю m запишется в виде

$$C(X_1, X_2, \dots, X_n) = \prod_{i=1}^n B_m^{2^q}(x_{iq}) \prod_{i=1}^n B_m^{2^{q-1}}(x_{i(q-1)}) \dots \prod_{i=1}^n B_m^{2^0}(x_{i0}). \quad (8)$$

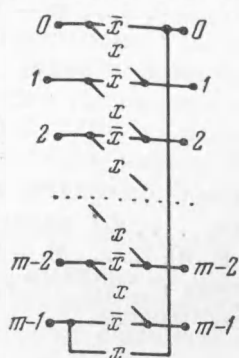


Рис. 2

Матрица $C(X_1, X_2, \dots, X_n)$, в силу (8), представляется как произведение $n(q+1)$ матриц

$$B_m^{2^p}(x_{ip}); \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad p = 0, 1, \dots, q,$$

каждая из которых зависит только от одного аргумента x_{ip} и, следовательно, может состоять только из элементов вида $1, 0, x_{ip}, \bar{x}_{ip}$. Заметим, что числа не равных тождественно нулю элементов матрицы $B_m^{2^p}(x_{ip})$ и $B_m(x_{ip})$ совпадают.

3. Рассмотрим теперь схему, зависящую не только от числа отличных от нуля аргументов, но и от порядка их следования.

Мы будем говорить, что имеет место инверсия в порядке следования аргументов x_1, x_2, \dots, x_n , если $x_i > x_{i+1}$ (т. е. если $x_i = 1, x_{i+1} = 0$). Построим схему $\bar{D}(x_1, x_2, \dots, x_n)$, разрывающую электрическую цепь в случае наличия хотя бы одной инверсии. Как и в предыдущем случае, мы будем искать $D(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в виде произведения одинаковых матриц

$$D(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n T(x_i). \quad (9)$$

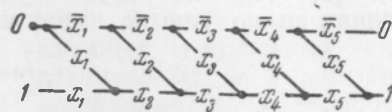


Рис. 3

Из определения схемы имеем:

$$T^2(1) = T(1); \quad T^2(0) = T(0); \quad T(1)T(0) = 0. \quad (10)$$

Этими соотношениями определяются следующие простые матрицы второго порядка:

$$T(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad T(1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad T(x) = \begin{pmatrix} \bar{x} & x \\ 0 & x \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Схема для случая $n=5$ приводится на рис. 3.

Очевидно, схема разывает цепь в случае наличия хотя бы одной инверсии, а при отсутствии инверсий подает напряжение на 0-ю шину, если $x_n = 0$ и на 1-ю шину, если $x_n = 1$. При помощи клеточных матриц легко построить схему сложения числа инверсий по модулю m и др.

В качестве матричных элементов можно употреблять не только независимые переменные, но и любые их функции, принимающие два значения (0 и 1), что позволяет расширить круг задач, для решения которых применим матричный метод.

Пользуюсь случаем выразить искреннюю признательность К. Ф. Теодорчику и В. И. Шестакову за интерес и внимание к моей работе.

Институт физики
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова

Поступило
18 VI 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ В. И. Шестаков, ЖТФ, 11, № 6, 532 (1941). ² А. Г. Лунц, ДАН, 70, № 3, 421 (1950). ³ А. Г. Лунц, ДАН, 75, № 2, 201 (1950).