Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXVII, № 2

ТЕПЛОТЕХНИКА

И. Е. КУБЫНИН

ОБ УРАВНЕНИЯХ ПЕРЕНОСА ТЕПЛА И ГОРЯЩЕГО ВЕЩЕСТВА

(Представлено академиком М. В. Кирпичевым 17 IX 1952)

Все тепловые машины и аппараты, работающие в промышленности и на транспорте, развиваются на основе рационального использования термохимического превращения вещества и образованного тепла. Математический же анализ процесса термохимического превращения вещества (процесс горения топлива) пока находится в начальной стадии развития.

В литературе обычно дается подробный вывод уравнения теплопроводности с источником тепла в следующей дифференциальной форме:

$$\operatorname{div}(\lambda\nabla T)-\operatorname{div}(c_p\gamma\,\mathbf{W}T)-\frac{\partial(c_p\gamma T)}{\partial t}=Q. \tag{1}$$

Аналогичным образом выводится уравнение диффузии в подвижной среде:

$$\operatorname{div}(D\nabla C)-\operatorname{div}(C\mathbf{W})-\frac{\partial C}{\partial t}=-G. \tag{2}$$

Совместно решить систему уравнений (1) и (2) можно только после установления связи между источником тепла Q и стоком горящего вещества G. Такую очевидную связь можно установить в следующей простой форме:

$$Q=\theta G, \tag{3}$$

где θ — тепловой эквивалент (теплотворная способность реагирующей смеси).

С помощью этой связи (3) исключаются источники и оказывается возможным объединить уравнения (1) и (2) в одно уравнение, содержащее в явном виде основные искомые переменные T и C.

$$\operatorname{div}(\lambda\nabla T)-\operatorname{div}(c_p\gamma\,\mathbf{W}T)-\frac{\partial(c_p\gamma T)}{\partial t}=\theta\left[\operatorname{div}(D\nabla C)-\operatorname{div}(C\mathbf{W})-\frac{\partial C}{\partial t}\right]. \tag{4}$$

Предположим, что **конвективный перенос тепла равен конвективному переносу реагирующего вещества, умноженному на его теплотворную способность**; тогда из уравнения (4) получается:

$$\operatorname{div}(c_p\gamma\mathbf{W}T)-\frac{\partial(c_p\gamma T)}{\partial t}=\theta\left[\operatorname{div}(C\mathbf{W})-\frac{\partial C}{\partial t}\right]. \tag{5}$$

Уравнения (4) и (5) учитывают в одинаковой мере перенос тепла и перенос горящего вещества или изменение температуры и концентрации.

Для случая одномерной задачи и установившегося режима течения уравнение (5) напишется в следующей форме:

$$\frac{d}{dx}(c_p\gamma\,\mathbf{W}T-\theta C\mathbf{W})=0. \tag{6}$$

Пользуясь граничными условиями, что при температуре воспламенения смеси $T_в$ концентрация прореагировавшего кислорода равна нулю, можно получить интеграл уравнения (6) в следующей форме:

$$C = -\frac{c_p \gamma T_в^2}{\theta}\frac{1}{T} + \frac{c_p \gamma T_в}{\theta} \quad \text{или} \quad C = -A\frac{1}{T} + B. \qquad (7)$$

Для не вступившего в реакцию кислорода зависимость C от T получается равной

$$C = A\frac{1}{T} - B.$$

Полученный нами интеграл (7) удовлетворяет не только одномерной задаче (6), но и трехмерному уравнению, в чем можно убедиться простой подстановкой. Если соблюсти следующие условия:

$$D = D_в\left(\frac{T}{T_в}\right)^2; \quad W = W_в\frac{T}{T_в}; \quad D = \frac{\lambda}{c_p\gamma}, \qquad (8)$$

то зависимость (7) удовлетворяет и уравнению (4) одновременного переноса тепла и горящего вещества путем теплопроводности и конвекции.

Любопытно отметить, что, как явствует из уравнения (4), определение коэффициента диффузии, как функции температуры (8), не только не усложнило решения задачи, а наоборот, упростило его, так как при этом произошло сокращение нелинейных членов уравнения (4) и оно обратилось в следующее уравнение:

$$(\lambda - c_{p_в}\gamma_в D_в)\,\mathrm{grad}\,T = 0. \qquad (9)$$

В результате изложенного исследования получена очень важная зависимость (7) между основными искомыми функциями T и C. Но окончательное решение задачи в соответствии с потребностями промышленной теплотехники должно в конечном счете заключаться в определении C и T как функций координат. Чтобы найти аналитическим путем поле температур и поле концентраций, необходимо решить второе уравнение, содержащее искомые функции T и C. Такое уравнение получается из уравнения (2), если переписать его в следующем виде:

$$\mathrm{div}\,(D\,\mathrm{grad}C) - C\,\mathrm{div}\,\mathbf{W} - (\mathbf{W}\,\mathrm{grad}C) - \frac{\partial C}{\partial t} = -G \qquad (10)$$

и предположить, что конвективный перенос реагирующей горящей) массы уравновешивается источником, т. е.

$$G = (\mathbf{W}\,\mathrm{grad}C) + \frac{\partial C}{\partial t}. \qquad (11)$$

В этом случае из уравнения (10) будем иметь

$$\mathrm{div}\,(D\,\mathrm{grad}C) - C\,\mathrm{div}\,\mathbf{W} = 0. \qquad (12)$$

Подставляя это уравнение переноса горящего вещества (12) в уравнение (4), получаем уравнение переноса тепла при установившемся режиме:

$$\mathrm{div}\,(\lambda\,\mathrm{grad}T) - \mathrm{div}\,(c_p\gamma\mathbf{W}T) = \theta\mathbf{W}\,\mathrm{grad}C \qquad (13)$$

и при учете лучистого теплообмена:

$$\mathrm{div}\,(\lambda_м\nabla T) + \mathrm{div}\,(\lambda_л\nabla T) - \mathrm{div}\,(c_p\gamma\mathbf{W}T) = \theta\mathbf{W}\nabla C. \qquad (14)$$

Если подставить в уравнение (12) значение концентрации из соотношения (7) и воспользоваться соотношением (8), то оно переходит в уравнение (13), и, наоборот, уравнение (13), превращается в уравнение (12), а каждое из них дает следующее уравнение температурного поля при одномерной задаче:

$$\frac{d^2 T}{dx^2} - h\frac{dT}{dx} + \frac{m}{T}\frac{dT}{dx} = 0, \tag{15}$$

где

$$h = \frac{c_{p_\text{в}} \gamma_\text{в} W_\text{в}}{\lambda_\text{в}}; \quad m = hT_\text{в}.$$

Аналогичным образом получается из уравнения для одномерной задачи уравнение температурного поля при учете лучистого теплообмена в следующем виде:

$$(\lambda_\text{м} + \lambda_0 T^{n+3}) \frac{d^2 T}{dx^2} - c_{p_\text{в}} \gamma_\text{в} W_\text{в} \left(1 - \frac{T_\text{в}}{T}\right) \frac{dT}{dx} + (n+3)\lambda_0 T^{n+2} \left(\frac{dT}{dx}\right)^2 = 0, \tag{16}$$

где произведена, по данным С. Н. Шорина, подстановка

$$\lambda_\text{л} = \frac{16}{3}\frac{1}{k}\frac{\sigma_0}{T}\left(\frac{T}{100}\right)^4 \quad \text{и} \quad k = bT^{-n}, \tag{17}$$

$\sigma_0 = 4{,}96$.

Заменяя производную от искомой функции через новую переменную $u = \frac{dT}{dx}$ и понижая порядок уравнения, сведем нелинейное уравнение (16) к следующему уравнению типа Бернулли:

$$\frac{du}{dT} + P(T)\,u - Q(T)\,u^\alpha = 0, \tag{18}$$

где $\alpha = 0$ и $u^\alpha = 1$.

Найдем решение уравнения (18) известным методом замены искомой функции u через произведение двух новых неизвестных функций в следующем виде:

$$u = \frac{dT}{dx} = h\frac{T - T_\text{в} \ln T}{\lambda_\text{м} + \lambda_0 T^{n+3}} + \frac{k_2}{\lambda_\text{м} + \lambda_0 T^{n+3}}. \tag{19}$$

Из краевых условий задачи $\frac{dT}{dx} = 0$, $T = T_{\max}$, и из уравнения (19) получается второй интеграл уравнения (16):

$$-x = \int \frac{\lambda_\text{м}\, dT}{\ln\left[\left(\frac{T_\text{макс}}{T}\right)^{-m} e^{h\,(T_\text{макс} - T)}\right]} + \int \frac{\lambda_0 T^{n+3}\, dT}{\ln\left[\left(\frac{T_\text{макс}}{T}\right)^{-m} e^{h\,(T_\text{макс} - T)}\right]} + k_3. \tag{20}$$

Оба эти интеграла не берутся в элементарных функциях, а поэтому преобразуем их к интегральному логарифму типа

$$\int \frac{du}{u^p \ln u} = \ln|\ln u| - (p-1)\ln u + \frac{(p-1)^2 (\ln u)^2}{2 \cdot 2!} - \frac{(p-1)^3 (\ln u)^3}{3 \cdot 3!} + \ldots + k_3.$$

Ограничиваясь первым членом ряда и произведя простые преобразования, получаем окончательную расчетную формулу температурного поля:

$$T_\text{в} \ln T - T = e^{-\frac{x}{\lambda_\text{м} + \lambda_0}} \left[T_\text{в} \ln \frac{T_\text{в}}{T_\text{макс}} + T_\text{макс} - T_\text{в}\right] + T_\text{в} \ln T_\text{макс} - T_\text{макс}. \tag{21}$$

Пользуясь зависимостью (7) и уравнением (21), можно получить окончательную расчетную формулу для определения поля концентраций.

В промышленной теплотехнике и промышленной газификации топлива представляет интерес неадиабатический процесс горения, когда образованное тепло расходуется не только на повышение температуры смеси, а, главным образом, когда оно передается в окружающую среду поверхностям нагрева. В этом случае количество тепла, образуемое в конце зоны горения $Q = \frac{c_{p_в}\gamma_в W_в}{\lambda_в}\frac{T_в}{T_{макс}}\frac{dT}{dx}$, полностью передается в окружающую среду по закону охлаждения $Q = \alpha(T_{макс} - T_{ст})$, и ничего не расходуется на подогрев смеси, так как температура достигла $T_{макс}$. Из этого получается аналог краевым условиям третьего рода и, следовательно, будем иметь:

$$-\frac{dT}{dx} = \frac{\alpha\lambda T_{макс}}{c_{p_в}\gamma_в W_в T_в}(T_{макс} - T_{ст}). \tag{22}$$

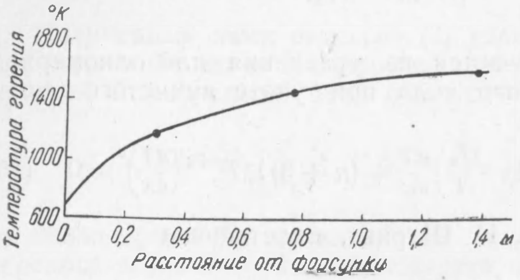

Рис. 1

Подставляя значение этой производной в уравнение (19), получаем постоянную интегрирования

$$k_2 = -(\lambda_м + \lambda_0 T_{макс}^{n+3})\frac{\alpha\lambda T_{макс}}{hT_в}(T_{макс} - T_{ст}) - h(T_{макс} - T_в \ln T_{макс}),$$

где α — суммарный коэффициент теплопередачи, $T_{ст}$ — температура тепловоспринимающей среды.

Дальнейшее решение находится аналогично решению уравнения (20), в результате чего получается окончательная расчетная формула температурного поля

$$T_в \ln T - T = e^{-\frac{x}{\lambda_м+\lambda_0}}\left[T_в \ln\frac{T_в}{T_{макс}} + T_{макс} - T_в + \frac{c_1}{h}\right] + T_в \ln T_{макс} - T_{макс} - \frac{c_1}{h}, \tag{23}$$

где $c_1 = \frac{\alpha\lambda T_{макс}}{hT_в}(\lambda_м + \lambda_0 T_{макс}^{n+3})(T_{макс} - T_{ст})$.

Из условий, что зона горения заканчивается там, где температура перестает расти и достигает $T_{макс}$, получается расчетная формула для определения длины зоны горения в следующем виде:

$$-x_m = H(\lambda_м + \lambda_0)\ln\frac{\frac{\alpha\lambda T_{макс}}{hT_в}(\lambda_м + \lambda_0 T_{макс}^{n+3})(T_{макс} - T_{ст})}{\ln\left[\left(\frac{T_в}{T_{макс}}\right)^{hT_в} e^{h(T_{макс}-T)+c_1}\right]}, \tag{24}$$

где H — количество расходуемого топлива в кг/час. Расчетные формулы (23) и (24) находятся в хорошем соответствии с опытом, как видно из рис. 1.

Выражаю благодарность чл.-корр. АН СССР А. С. Предводителеву за ряд ценных советов.

Институт горючих ископаемых и
Энергетический институт им. Г. М. Кржижановского
Академии наук СССР

Поступило
31 VII 1952