Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXVII, № 1

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

В. И. КЕЙЛИС-БОРОК

ОБ УРАВНЕНИИ ЧАСТОТ МНОГОСЛОЙНОЙ УПРУГОЙ СРЕДЫ

(Представлено академиком О. Ю. Шмидтом 1 IX 1952)

В настоящей работе рассматривается уравнение частот для n-слойного полупространства — упругой системы, состоящей из произвольного числа n плоско-параллельных слоев и полупространства, заполненных однородной, изотропной средой. Смещения и нормальные напряжения — непрерывные функции координат (жесткий контакт); на границе рассматриваемой системы нормальные напряжения равны нулю.

Пусть однородное полупространство занимает область $z > 0$ в прямоугольной системе xyz. Пронумеруем слои и их границы по возрастанию z так, чтобы q-й слой занимал область $-z_q \leqslant z \leqslant -z_{q+1}$ ($q = 1, 2, \ldots, n$; $z_{n+1} = 0$; области $z > 0$ приписан номер $n+1$).

Представляя решение волновых уравнений в виде интегралов Фурье — Бесселя (([1,3]) и др.), и вводя условие осевой симметрии, можно показать, что уравнение частот n-слойного полупространства имеет вид:

$$\Delta_n^{(1,2,\ldots,n+1)}(\xi^2, z_1, z_2, \ldots, z_n) \equiv E_n^{(1,2,\ldots,n+1)} \prod_{q=1}^{n} \alpha_q \beta_q = 0, \tag{1}$$

где $\Delta_n^{(1,2,\ldots,n+1)}$ — определитель системы граничных условий (индекс в скобках содержит перечисление слоев); ξ — волновое число, относительно которого решается уравнение;

$$E_n = \begin{vmatrix} s_0 \\ \vdots \\ s_n \end{vmatrix}; \tag{2}$$

$s_0, \ldots, s_n$ — матрицы, определяемые формулами (3), (4) и (5). В этих формулах цифры в скобках указывают номера строк и столбцов, пропущенные элементы равны нулю; p — круговая частота колебаний; a_q, b_q — скорости продольных и поперечных волн; μ_q — константа Ляме в q-м слое; $\alpha_q = \sqrt{\xi^2 - p^2/a_q^2}$; $\beta_q = \sqrt{\xi^2 - p^2/b_q^2}$; $\gamma_q = 2\xi^2 - p^2/b_q^2$; $\sigma_q = \mu_{q+1}/\mu_q$. Радикалы α_{n+1} и β_{n+1} считаются положительными или положительно мнимыми.

Исследование показывает, что:

1) Δ_n — четная функция ξ, принимающая некомплексные значения при действительных ξ, если $\xi^2 < k_{n+1}^2$.

2) $$\lim_{z_q \to z_{q+1}} E_n^{(1,2,\ldots,n+1)} = \sigma_{q-1,q}^2 k_q^4 E_{n-1}^{(1,2,\ldots,q-1,\,q+1,\ldots,n+1)}. \tag{6}$$

$$s_0 = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccccc} (1) & (2) & (3) & (4) & (5) & & (4n+2) \end{array} & \\ \left\| \begin{array}{ccccccc} \gamma_1 \operatorname{ch} \alpha_1 z_1 & -\gamma_1 \dfrac{\operatorname{sh} \alpha_1 z_1}{\alpha_1} & 2i\xi\beta_1 \operatorname{sh} \beta_1 z_1 & -2i\xi \operatorname{ch} \beta_1 z_1 & 0 & \ldots & 0 \\ -2i\xi\alpha_1 \operatorname{sh} \alpha_1 z_1 & 2i\xi \operatorname{ch} \alpha_1 z_1 & \gamma_1 \operatorname{ch} \beta_1 z_1 & -\gamma_1 \dfrac{\operatorname{sh} \beta_1 z_1}{\beta_1} & 0 & \ldots & 0 \end{array} \right\| & \begin{array}{c} (1) \\ (2) \end{array} \end{array} \tag{3}$$

$$s_q = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} & (4q-3) & (4q-2) & (4q-1) & (4q) & (4q+1) \end{array} \\ \left\| \begin{array}{cccccc} \ldots & \gamma_q \operatorname{ch} \alpha_q z_{q+1} & -\gamma_q \dfrac{\operatorname{sh} \alpha_q z_{q+1}}{\alpha_q} & 2i\xi\beta_q \operatorname{sh} \beta_q z_{q+1} & -2i\xi \operatorname{ch} \beta_q z_{q+1} & -\sigma_q \gamma_{q+1} \operatorname{ch} \alpha_{q+1} z_{q+1} \\ \ldots & -2i\xi\alpha_q \operatorname{sh} \alpha_q z_{q+1} & 2i\xi \operatorname{ch} \alpha_q z_q & \gamma_q \operatorname{ch} \beta_q z_{q+1} & -\gamma_q \dfrac{\operatorname{sh} \beta_q z_{q+1}}{\beta_q} & 2i\xi\sigma_q \alpha_{q+1} \operatorname{sh} \alpha_{q+1} z_{q+1} \\ \ldots & i\xi \operatorname{ch} \alpha_q z_{q+1} & -i\xi \dfrac{\operatorname{sh} \alpha_q z_{q+1}}{\alpha_q} & -\beta_q \operatorname{sh} \beta_q z_{q+1} & \operatorname{ch} \beta_q z_{q+1} & -i\xi \operatorname{ch} \alpha_{q+1} z_{q+1} \\ \ldots & -\alpha_q \operatorname{sh} \alpha_q z_{q+1} & \operatorname{ch} \alpha_q z_{q+1} & -i\xi \operatorname{ch} \beta_q z_{q+1} & i\xi \dfrac{\operatorname{sh} \beta_q z_{q+1}}{\beta_q} & \alpha_{q+1} \operatorname{sh} \alpha_{q+1} z_{q+1} \end{array} \right\| \end{array}$$

$$s'_0 = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} (1) & (2) & (3) & (4) \end{array} & \\ \left\| \begin{array}{cccc} \gamma_1 + \gamma_1 e^{-2\alpha_1 z_1} & 2i\xi\beta_1 - 2i\xi\beta_1 e^{-2\beta_1 z_1} & 0 + \dfrac{\gamma_1}{\alpha_1} e^{-\alpha_1 m_1} & 0 - 2i\xi e^{-\beta_1 m_1} \\ -2i\xi\alpha_1 + 2i\xi\alpha_1 e^{-2\alpha_1 z_1} & \gamma_1 + \gamma_1 e^{-2\beta_1 z_1} & 0 + 2i\xi e^{-\alpha_1 m_1} & 0 + \dfrac{\gamma_1}{\beta_1} e^{-\beta_1 m_1} \end{array} \right\| & \begin{array}{c} (1) \\ (2) \end{array} \end{array} \tag{10}$$

$$s'_q = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} & (4q-3) & (4q-2) & (4q-1) & (4q) & (4q+1) \end{array} \\ \left\| \begin{array}{cccccc} \ldots & 0 + \gamma_q \chi_q^{(1)} e^{-\alpha_q m_q} & 0 + 2i\xi\beta_q \overline{\chi}_q^{(2)} e^{-\beta_q m_q} & \dfrac{\gamma_1}{\alpha_1} & -2i\xi & -\sigma_q \gamma_{q+1} - \sigma_q \gamma_{q+1} e^{-2\alpha_{q+1} z_{q+1}} \\ \ldots & 0 - 2i\xi\alpha_q \chi_q^{(2)} e^{-\alpha_q m_q} & 0 + \gamma_q \overline{\chi}_q^{(1)} e^{-\beta_q m_q} & 2i\xi & \dfrac{\gamma_1}{\beta_1} & 2i\xi\sigma_q \alpha_{q+1} - 2i\xi\sigma_q \alpha_{q+1} e^{-2\alpha_{q+1} z_{q+1}} \\ \ldots & 0 + i\xi \chi_q^{(1)} e^{-\alpha_q m_q} & 0 - \beta_q \overline{\chi}_q^{(2)} e^{-\beta_q m_q} & \dfrac{i\xi}{\alpha_1} & 1 & -i\xi - i\xi e^{-2\alpha_{q+1} z_{q+1}} \\ \ldots & 0 - \alpha_q \chi_q^{(2)} e^{-\alpha_q m_q} & 0 - i\xi \chi_q^{(1)} e^{-\beta_q m_q} & 1 & -\dfrac{i\xi}{\beta_1} & \alpha_{q+1} - \alpha_{q+1} e^{-2\alpha_{q+1} z_{q+1}} \end{array} \right\| \end{array}$$

В частности,

$$\lim_{z_0 \to 0} E_n = \frac{\mu_{n+1}}{\mu_1} E_0^{(n+1)} \prod_{q=1}^{n} k_q^2 ; \tag{7}$$

Δ_0 или E_0 — левая часть уравнения Релея для полупространства $z > 0$ со свободной границей. Стремление к этим пределам равномерное и непрерывное.

3) $$\Delta_n^{(1,2,\ldots,n+1)} = \left\{ \Delta_0^{(1)} \prod_{q=1}^{n} \overline{\Delta}_0^{(q,\,q+1)} + O\left(e^{-\beta_r m_r}\right) \right\} \prod_{q=1}^{n} e^{\alpha_q m_q} e^{\beta_q m_q} , \tag{8}$$

$$
s_n = \begin{array}{c|cccccc|c}
 & (4n-3) & (4n-2) & (4n-1) & (4n) & (4n+1) & (4n+2) & \\
\ldots & \gamma_n & 0 & 0 & -2i\xi & -\sigma_n\gamma_{n+1} & -2i\xi\sigma_n\beta_{n+1} & (4n-1)\\
\ldots & 0 & 2i\xi & \gamma_n & 0 & 2i\xi\sigma_n\alpha_{n+1} & -\sigma_n\gamma_{n+1} & (4n)\\
\ldots & i\xi & 0 & 0 & 1 & -i\xi & \beta_{n+1} & (4n+1)\\
\ldots & 0 & 1 & -i\xi & 0 & \alpha_{n+1} & i\xi & (4n+2)
\end{array} \qquad (5)
$$

$$
\begin{array}{ccc|c}
(4q+2) & (4q+3) & (4q+4) & \\
-\sigma_q\gamma_{q+1}\dfrac{\operatorname{sh}\alpha_{q+1}z_{q+1}}{\alpha_{q+1}} & -2i\xi\sigma_q\beta_{q+1}\operatorname{sh}\beta_{q+1}z_{q+1} & 2i\xi\sigma_q\operatorname{ch}\beta_{q+1}z_{q+1}\ \ldots & (4q-1)\\
-2i\xi\sigma_q\operatorname{ch}\alpha_{q+1}z_{q+1} & -\sigma_q\gamma_{q+1}\operatorname{ch}\beta_{q+1}z_{q+1} & \sigma_q\gamma_{q+1}\dfrac{\operatorname{sh}\beta_{q+1}z_{q+1}}{\beta_{q+1}}\ \ldots & (4q)\\
 & & & (q=1,\ldots,n-1)\\
i\xi\dfrac{\operatorname{sh}\alpha_{q+1}z_{q+1}}{\alpha_{q+1}} & \beta_{q+1}\operatorname{sh}\beta_{q+1}z_{q+1} & -\operatorname{ch}\beta_{q+1}z_{q+1}\ \ldots & (4q+1)\\
-\operatorname{ch}\alpha_{q+1}z_{q+1} & i\xi\operatorname{ch}\beta_{q+1}z_{q+1} & -i\xi\dfrac{\operatorname{sh}\beta_{q+1}z_{q+1}}{\beta_{q+1}}\ \ldots & (4q+2)
\end{array} \qquad (4)
$$

$$
s'_n = \begin{array}{c|cccccc|c}
 & (4n-3) & (4n-2) & (4n-1) & (4n) & (4n+1) & (4n+2) & \\
\ldots & \gamma_n e^{-\alpha_n z_n} & 0 & \dfrac{\gamma_n}{\alpha_n} & -2i\xi & -\sigma_n\gamma_{n+1} & -2i\xi\sigma_n\beta_{n+1} & (4n-1)\\
\ldots & 0 & \gamma_n e^{-\beta_n z_n} & 2i\xi & \dfrac{\gamma_n}{\beta_n} & 2i\xi\sigma_n\alpha_{n+1} & -\sigma_n\gamma_{n+1} & (4n)\\
\ldots & i\xi e^{-\alpha_n z_n} & 0 & \dfrac{i}{\alpha_n} & -1 & -i\xi & \beta_{n+1} & (4n+1)\\
\ldots & 0 & -i\xi e^{-\beta_n z_n} & 1 & -\dfrac{i\xi}{\beta_n} & \alpha_{n+1} & i\xi & (4n+2)
\end{array} \qquad (12)
$$

$$
\begin{array}{cccc|c}
(4q+2) & (4q+3) & (4q+4) & & \\
-2i\xi\beta_{q+1}\sigma_q + 2i\xi\sigma_q\beta_{q+1}e^{-2\beta_{q+1}z_{q+1}} & 0-\sigma_q\dfrac{\gamma_{q+1}}{\alpha_{q+1}}e^{-\alpha_{q+1}m_q} & 0+2i\xi\sigma_q e^{-\beta_{q+1}m_q} & \ldots & (4q-1)\\
-\sigma_q\gamma_{q+1} - \sigma_q\gamma_{q+1}e^{-2\beta_{q+1}z_{q+1}} & 0-2i\xi\sigma_q e^{-\alpha_{q+1}m_q} & 0-\dfrac{\sigma_q}{\beta_{q+1}}\gamma_{q+1}e^{-\beta_{q+1}m_q} & \ldots & (4q)\\
\beta_{q+1} - \beta_{q+1}e^{-2\beta_{q+1}z_{q+1}} & 0-\dfrac{i\xi}{\alpha_{q+1}}e^{-\alpha_{q+1}m_q} & 0-e^{-\beta_{q+1}m_q} & \ldots & (4q+1)\\
i\xi + i\xi e^{-2\beta_{q+1}z_{q+1}} & 0-e^{-\alpha_{q+1}m_q} & 0+\dfrac{i\xi}{\beta_{q+1}}e^{-\beta_{q+1}m_q} & \ldots, & (4q+2)
\end{array} \qquad (11)
$$

где m_q — толщина q-го слоя, r — номер самого тонкого слоя; $\overline{\Delta}{}_0^{q,j}$ — левая часть уравнения частот для полупространств q, j. Физический смысл этой формулы очевиден: при увеличении мощности слоев или частоты каждую границу можно считать разделяющей два однородных полупространства.

Доказательство формулы (8) основано на том, что E_n можно представить в виде:

$$
E_n = (-1)^n \begin{vmatrix} s'_0 \\ \vdots \\ s'_n \end{vmatrix} \prod_{q=1}^{n} e^{\alpha_q m_q} e^{\beta_q m_q}, \qquad (9)
$$

где $s'_0, \ldots, s'_n$ даются формулами (10), (11) и (12) ($q = 1, 2, \ldots, n-1$).

Вторые слагаемые каждого столбца убывают с возрастанием ξ или m_q по экспоненциальному закону; первые слагаемые образуют квази-диагональную матрицу, в которой: а) определитель, составленный ненулевыми элементами первых двух строк, равен $\Delta_0^{(1)}$; б) определитель, составленный ненулевыми элементами $(4q-1)$, $(4q)$, $(4q+1)$, $(4q+2)$-й строк $(q=1, 2, \ldots, n)$, равен $\frac{1}{\alpha_1\beta_1}\overline{\Delta}_0^{(q, q+1)}$. Отсюда и из (1), (2) непосредственно вытекает (8).

Как известно, Δ_0 и $\overline{\Delta}_0$ с увеличением ξ равномерно возрастают пропорционально ξ^2 ([2]), и все действительные нули этих функций, а следовательно, и рассматриваемые корни (1), ограничены по модулю.

Теорема. *При достаточно малом z_1 уравнение частот n-слойной среды имеет в точности один и притом простой действительный положительный корень по ξ^2.*

Это — обобщение теоремы, доказанной М. А. Наймарком для $n=1$.

При $z_1=0$ (1) имеет, в силу (7), только один—релеевский—корень $\xi_R^2 > k_{n+1}^2$. При ξ^2, близких к ξ_R^2, все элементы E_n равномерно непрерывны вместе с производными по ξ^2 и z_q. Следовательно, $\frac{\partial}{\partial\xi^2}E_n\big|_{z_1=0} = \sigma_{1,n+1}^2 \prod_{q=1}^{n} k_q^2 \frac{\partial}{\partial\xi^2}E_0^{n+1}$. Как известно,

$$\frac{\partial}{\partial\xi^2}E_0^{(n+1)} > \nu > 0, \tag{13}$$

где ν — константа. Отсюда, в силу теоремы о существовании неявной функции, следует, что при достаточно малом z_1 уравнение частот имеет один и только один корень по ξ^2 в интервале $\xi_R^2 - \varepsilon < \xi^2 < \xi_R^2 + \varepsilon$, где ε — малое положительное число.

Единственность этого корня при всех ξ^2 можно доказать от противного. Пусть при малых z_1 (1) имеет второй корень $\overline{\xi}^2(z_1)$. Как показано выше, $\overline{\xi}^2(z_1)$ ограничен сверху. E_n есть непрерывная функция ξ^2 и z_q при ограниченных ξ^2. Следовательно, предельное значение $\overline{\xi}^2(0)$ также будет корнем уравнения частот. В силу единственности корня уравнения Релея $\overline{\xi}^2(0)$ не может быть отлично от ξ_R^2; но в силу единственности корня уравнения (1) при малых z_1 и $|\xi^2-\xi_R^2|<\varepsilon$ $\overline{\xi}^2(0)$ не может быть и равно ξ_R^2. Следовательно, при малых z_1 (1) имеет один и только один положительный корень по ξ^2.

Из (13) и из непрерывности E_n и $\partial E_n/\partial\xi^2$ в окрестности точки $z_1=0$, $\xi^2=\xi_R^2$, следует, что этот корень является простым. Теорема доказана.

Исследование показывает, что при любом конечном z_1 число действительных корней (1) ограничено, но возрастает с увеличением z_q, по крайней мере тогда, когда b_{n+1} больше хоть одной из скоростей b_q.

Из доказанной теоремы следует, что в произвольном n-слойном полупространстве могут распространяться свободные колебания, а также вынужденные колебания особого типа, преобладающие вдали от источника. Их фазовая скорость $v=p/\xi$ и интенсивность зависят от частоты и толщины слоев.

Геофизический институт
Академии наук СССР

Поступило
9 VIII 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] H. Lamb, Phil. Trans., 203 (A) (1904). [2] С. Л. Соболев, гл. XII кн. Ф. Франк и Р. Мизес, Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, 1937. [3] В. И. Кейлис-Борок, Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 2 (1951). [4] Г. И. Петрашень, Уч. зап. ЛГУ, сер. матем., в. 24 (1951).