Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXVII, № 2

МАТЕМАТИКА

Я. А. ТАГАМЛИЦКИЙ

ОБ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОМ РЯДЕ НЬЮТОНА С НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 19 IX 1952)

Будем пользоваться следующим обозначением: если

$$F(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_n)$$

многочлен, не имеющий кратных нулей, то

$$[f(t),\ \alpha_1,\ \alpha_2, \ldots, \alpha_n] = \frac{f(\alpha_1)}{F'(\alpha_1)} + \frac{f(\alpha_2)}{F'(\alpha_2)} + \ldots + \frac{f(\alpha_n)}{F'(\alpha_n)}. \qquad (1)$$

В случае кратных нулей многочлена $F(x)$ символ (1) определяется обычным переходом к пределу в предположении, что функция $f(x)$ имеет необходимые производные.

Пусть

$$0 < x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots$$

бесконечная последовательность положительных чисел, для которой

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{x_\nu} = \infty. \qquad (2)$$

Мы будем искать условия, при которых бесконечно дифференцируемая при $0 < x < \lim\limits_{\nu\to\infty} x_\nu$ функция $f(x)$ разлагается в ряд Ньютона с неотрицательными коэффициентами

$$f(x) = a_0 + a_1(x_1 - x) + a_2(x_1 - x)(x_2 - x) + \\ + a_3(x_1 - x)(x_2 - x)(x_3 - x) + \ldots \qquad (3)$$

Теорема. *Бесконечно дифференцируемая при* $0 < x < \lim\limits_{\nu\to\infty} x_\nu$ *функция* $f(x)$ *разлагается при* $0 < x < \lim\limits_{\nu\to\infty} x_\nu$ *тогда и только тогда в ряд Ньютона* (3) *с неотрицательными коэффициентами при* x_ν, *удовлетворяющих условию* (2), *когда*

$$(-1)^n [f(t),\ x,\ x_1,\ x_2, \ldots, x_n] \geqslant 0, \qquad (4)$$

$$(-1)^{n+1}[f(t),\ x,\ \xi,\ x_1,\ x_2,\dots,\ x_n] \geqslant 0 \tag{5}$$

при $0 < x < x_{n+1},\ 0 < \xi < x_{n+1},\ n = 0,\ 1,\ 2,\dots$

Замечание. Условие (5) выражает, что функция

$$\varphi_n(x) = (-1)^n [f(t),\ x,\ x_1,\ x_2,\dots,\ x_n]$$

не возрастает при $0 < x < x_{n+1}$, как это видно из тождества

$$\frac{\varphi_n(x) - \varphi_n(\xi)}{x - \xi} = (-1)^n [f(t),\ x,\ \xi,\ x_1,\ x_2,\dots,\ x_n].$$

Доказательство. Необходимость условий (4) и (5) для существования разложения (3) очевидна, так как из (3) получаем

$$(-1)^n [f(t),\ x,\ x_1,\ x_2,\dots,\ x_n] = \\ = a_n + a_{n+1}(x_{n+1} - x) + a_{n+2}(x_{n+1} - x)(x_{n+2} - x) + \dots \tag{6}$$

и, следовательно, функции

$$\varphi_n(x) = (-1)^n [f(t),\ x,\ x_1,\ x_2,\dots,\ x_n]$$

неотрицательны и не возрастают при $0 < x < x_{n+1}$.

Переходим к доказательству достаточности условий (4) и (5) для существования разложения (3). Для этого обозначим через N множество бесконечно дифференцируемых при $0 < x < \lim\limits_{\nu\to\infty} x_\nu$ функций, которые удовлетворяют условиям (4) и (5).

Пусть $f(x) \in N$ и

$$R_m(x) = f(x) - a_0 - a_1(x_1 - x) - a_2(x_1 - x)(x_2 - x) - \dots \\ \dots - a_m(x_1 - x)(x_2 - x)\dots(x_m - x),$$

где

$$a_k = (-1)^k [f(t),\ x_1,\ x_2,\dots,\ x_{k+1}],\quad k = 0,\ 1,\ 2,\dots$$

Нетрудно убедиться, что $R_m(x) \in N$. Для этого заметим, что при $n \geqslant m+1$

$$[R_m(t),\ x,\ x_1,\dots,\ x_n] = [f(t),\ x,\ x_1,\ x_2,\dots,\ x_n]. \tag{7}$$

С другой стороны,

$$R_m(x_1) = R_m(x_2) = \dots = R_m(x_{m+1}) = 0,$$

и, следовательно, при $n \leqslant m$ будем иметь

$$(-1)^n [R_m(t),\ x,\ x_1,\ x_2,\dots,\ x_n] = \frac{(-1)^n R_m(x)}{(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n)} = \\ = \frac{(-1)^{m+1}(x_{n+1} - x)\dots(x_{m+1} - x) R_m(x)}{(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n)(x - x_{n+1})\dots(x - x_{m+1})} = \\ = (-1)^{m+1}(x_{n+1} - x)\dots(x_{m+1} - x)[R_m(t),\ x,\ x_1,\dots,\ x_{m+1}] = \\ = (-1)^{m+1}(x_{n+1} - x)\dots(x_{m+1} - x)[f(t),\ x,\ x_1,\dots,\ x_{m+1}].$$

Таким образом установлено, что функции

$$\psi_n(x) = (-1)^n [R_m(t),\ x,\ x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n]$$

в самом деле неотрицательны и не возрастают при $0 < x < x_{n+1}$.

Теперь нетрудно установить, что если выполнены условия (4) и (5), то функция $f(x)$ разлагается в ряд (3). Для этого заметим, что при $0 < \xi < x < x_{m+l}$

$$0 \leqslant (-1)^{m+1} [R_m(t),\ x,\ x_1, \ldots,\ x_{m+1}] \leqslant (-1)^{m+1} [R_m(t),\ \xi,\ x_1, \ldots,\ x_{m+1}],$$

т. е.

$$|R_m(x)| \leqslant |R_m(\xi)| \left| \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{m+1})}{(\xi-x_1)(\xi-x_2)\ldots(\xi-x_{m+1})} \right| =$$
$$= |R_m(\xi)| \left| \left(1 - \frac{x-\xi}{x_1-\xi}\right)\left(1 - \frac{x-\xi}{x_2-\xi}\right)\ldots\left(1 - \frac{x-\xi}{x_{m+1}-\xi}\right) \right|.$$

Принимая во внимание условие (4), заключаем, что

$$a_k = (-1)^k [f(t),\ x_1,\ x_2, \ldots,\ x_k,\ x_{k+1}] =$$
$$= (-1)^k [f(t),\ x_{k+1},\ x_1,\ x_2, \ldots,\ x_k] \geqslant 0,$$

т. е. при $0 < \xi < x_1$

$$0 \leqslant R_m(\xi) \leqslant f(\xi),$$

и, следовательно,

$$|R_m(x)| \leqslant f(\xi) \left| \left(1 - \frac{x-\xi}{x_1-\xi}\right)\left(1 - \frac{x-\xi}{x_2-\xi}\right)\ldots\left(1 - \frac{x-\xi}{x_{m+1}-\xi}\right) \right|.$$

Далее на основании условия (2) заключаем, что

$$\lim_{m\to\infty} \left(1 - \frac{x-\xi}{x_1-\xi}\right)\left(1 - \frac{x-\xi}{x_2-\xi}\right)\ldots\left(1 - \frac{x-\xi}{x_{m+1}-\xi}\right) = 0$$

при $x > \xi$, и, следовательно,

$$\lim_{m\to\infty} R_m(x) = 0$$

при $\xi < x < \lim\limits_{\nu\to\infty} x_\nu$. Таким образом мы получаем при $0 < x < \lim\limits_{\nu\to\infty} x_\nu$:

$$f(x) = a_0 + a_1(x_1 - x) + a_2(x_1 - x)(x_2 - x) + \ldots,$$

где коэффициенты $a_k = (-1)^k [f(t),\ x_1,\ x_2, \ldots,\ x_{k+1}]$, $k = 0,\ 1,\ 2, \ldots$, как мы уже заметили выше, неотрицательны.

П р и л о ж е н и е. Если функция $f(x)$, бесконечно дифференцируемая при $0 < x < \lim\limits_{\nu\to\infty} x_\nu$, удовлетворяет неравенствам

$$(-1)^k f^{(k)}(x) \geqslant 0, \quad k = 0,\ 1,\ 2, \ldots,$$

при $0 < x < \lim\limits_{\nu\to\infty} x_\nu$, то при $0 < x < x_{n+1}$, $0 < \xi < x_{n+1}$

$$(-1)^n [f(t),\ x,\ x_1, \ldots,\ x_n] = \frac{(-1)^n f^{(n)}(\eta)}{n!} \geqslant 0,$$

$$(-1)^{n+1} [f(t), x, \xi, x_1 \ldots,\ x_n] = \frac{(-1)^{n+1} f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!} \geqslant 0,$$

и, следовательно, функция $f(x)$ разлагается при $0 < x < \lim_{\nu\to\infty} x_\nu$ в ряд вида (3). В случае $x_1 = x_2 = x_3 = \ldots$ получаем классическую теорему С. Н. Бернштейна (¹) об аналитичности абсолютно монотонных функций.

Математический институт
Софийского университета
Болгария

Поступило
10 IX 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Бернштейн, Math. Ann., 75, 449 (1914).