Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXVII, № 2

МАТЕМАТИКА

Академик С. Л. СОБОЛЕВ

ОБ ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

Рассмотрим уравнение:

$$Lu_{m,n} = \frac{1}{4}\{u_{m+1,n+1} + u_{m-1,n-1} + u_{m+1,n-1} + u_{m-1,n+1} - 4u_{m,n}\} = 0, \qquad (1)$$

где $-\infty < m < +\infty$, $-\infty < n < +\infty$, для функции $u_{m,n}$, заданной в узлах сетки $m+n = 2k+1$.

Докажем следующую теорему:

Теорема 1. *Решение уравнения* (1), *возрастающее на бесконечности медленнее, чем* $\sqrt{m^2+n^2}$, *сводится к постоянной.*

Доказательство. Рассмотрим разности значений функции $u_{m,n}$ в двух смежных точках

$$u_{m'+1,n'} - u_{m'-1,n'}, \quad u_{m',n'+1} - u_{m',n'-1}.$$

Покажем, что в условиях теоремы эти разности будут равны нулю. Выберем начало координат в точке m', n'. Тогда нам достаточно будет установить равенство нулю разностей:

$$\delta_1 = u_{1,0} - u_{-1,0} \quad \delta_2 = u_{0,1} - u_{0,-1}. \qquad (2)$$

Рассмотрим квадрат

$$|m| = 2p+1, \quad |n| = 2p+1. \qquad (3)$$

Для уравнения (1) справедлив принцип максимума, а следовательно, и теорема единственности решения задачи Дирихле. Поэтому функция $u_{m,n}$ должна совпадать с суммой четырех функций:

$$u_{m,n} = u^{\mathrm{I}}_{m,n} + u^{\mathrm{II}}_{m,n} + u^{\mathrm{III}}_{m,n} + u^{\mathrm{IV}}_{m,n},$$

удовлетворяющих в свою очередь уравнению (1), из которых каждая обращается в нуль на трех сторонах квадрата, а на четвертой стороне совпадает с $u_{m,n}$. Например,

$$u^{\mathrm{I}}_{m,n}\Big|_{n=2p+1} = u_{m,n}\Big|_{n=2p+1}; \quad u^{\mathrm{I}}_{m,n}\Big|_{n=-2p-1} = u^{\mathrm{I}}_{m,n}\Big|_{|m|=2p+1} = 0. \qquad (4)$$

Также строятся остальные функции u^{II}, u^{III} и u^{IV}.

Если мы установим, что разности δ_1 и δ_2 обращаются в нуль для каждой из $u^{(j)}$ порознь, то теорема будет доказана. В силу симметрии достатачно установить теорему для одной из них, например $u^{\mathrm{I}}_{m,n}$. Для функции $u^{\mathrm{I}}_{m,n}$ можно дать явное выражение

$$u^{\mathrm{I}}_{m,n} = \sum_{k=1}^{2p+1} a_k U^{(k)}_{m,n}, \tag{5}$$

где

$$U^{(k)}_{m,n} = \sqrt{\frac{2}{2p+1}}\,\frac{\sin(m+2p+1)\,\alpha_k\,\mathrm{sh}\,(n+2p+1)\,\beta_k}{\mathrm{sh}\,(4p+2)\,\beta_k}; \tag{6}$$

$$k = 1, 2, \ldots 2p; \quad \alpha_k = \frac{k\pi}{4p+2}; \quad e^{\beta_k} = \mathrm{ctg}\left(\frac{\alpha_k}{2} + \frac{\pi}{4}\right), \tag{7}$$

и

$$U^{(2p+1)}_{m,n} = \sqrt{\frac{2}{2p+1}} \begin{cases} (-1)^{m/2} = \sin(m+2p+1)\,\alpha_{2p+1}, & n = 2p+1; \\ 0, & n < 2p+1. \end{cases} \tag{8}$$

Система функций (6) и (8), как нетрудно видеть, удовлетворяет условиям (4). Кроме того, они линейно независимы, ибо для них имеет место соотношение ортогональности:

$$\sum_{m=-2p}^{2p} U^{(k)}_{m,\,2p+1} U^{(l)}_{m,\,2p+1} = \begin{cases} 1, & k = l; \\ 0, & k \neq l. \end{cases} \tag{9}$$

Число их равно $(2p+1)$, и поэтому система этих функций полная.

Легко убедиться в том, что

$$\sum_{k=1}^{2p+1} a_k^2 = \sum_{m=-2p}^{2p} u^2_{m,\,2p+1} = A^{\mathrm{I}^2}(p). \tag{10}$$

Иными словами, сумма квадратов коэффициентов Фурье равна сумме квадратов значений функции u на стороне $n = 2p+1$. Разности δ_1 и δ_2 могут быть оценены через величину $A(p)$.

Действительно:

$$\delta_1 = \sum_{k=1}^{2p+1} a_k \left(U^{(k)}_{1,0} - U^{(k)}_{-1,0}\right), \quad \delta_2 = \sum_{k=1}^{2p+1} a_k \left(U^{(k)}_{0,1} - U^{(k)}_{0,-1}\right).$$

Поэтому, в силу неравенства Буняковского:

$$\delta_1^2 + \delta_2^2 \leqslant \sum_{k=1}^{2p+1} a_k^2 \sum_{k=1}^{2p} \left[\left(U^{(k)}_{1,0} - U^{(k)}_{-1,0}\right)^2 + \left(U^{(k)}_{0,1} - U^{(k)}_{0,-1}\right)^2\right]. \tag{11}$$

Подсчет показывает, что

$$\sum_{k=1}^{2p+1} \left[\left(U^{(k)}_{1,0} - U^{(k)}_{-1,0}\right)^2 + \left(U^{(k)}_{0,1} - U^{(k)}_{0,-1}\right)^2\right] \leqslant \frac{2}{2p+1} \sum_{k=1}^{2p+1} \left(\frac{\mathrm{tg}\,\gamma_k - \mathrm{ctg}\,\gamma_k}{\mathrm{tg}^{2p+1}\gamma_k - \mathrm{ctg}^{2p+1}\gamma_k}\right)^2, \tag{12}$$

где $\gamma_k = \alpha_k + \frac{\pi}{4} = \frac{k}{2}\,\frac{\pi}{4p+2} + \frac{\pi}{4}$, или, полагая

$$\frac{2}{2p+1}\sum_{k=1}^{2p}\left(\frac{\operatorname{tg}\gamma_k-\operatorname{ctg}\gamma_k}{\operatorname{tg}^{2p+1}\gamma_k-\operatorname{ctg}^{2p+1}\gamma_k}\right)^2=S(p), \tag{13}$$

$$\delta_1^2+\delta_2^2\leqslant A^{1^2}(p)\,S(p). \tag{14}$$

Оценим сумму $T(p)$. Для этого удобно сравнить ее с интегралом

$$I(p)=\frac{8}{\pi}\int_{\pi/4}^{\pi/2}\left(\frac{\operatorname{tg}\gamma-\operatorname{ctg}\gamma}{\operatorname{tg}^{2p+1}\gamma-\operatorname{ctg}^{2p+1}\gamma}\right)^2 d\gamma. \tag{15}$$

Под интегралом в (15) стоит убывающая функция переменного γ. Сумма $S(p)$ представляет собою поэтому значение интеграла $I(p)$, вычисленное при помощи суммы Дарбу с недостатком, и, значит,

$$S(p)<I(p). \tag{16}$$

Оценивая $I(p)$, будем иметь, взяв $\operatorname{ctg}\gamma=y$ за новое переменное:

$$I(p)=\frac{8}{\pi}\int_0^1\frac{(1-y^2)^2}{(1-y^{4p+2})^2}\,\frac{y^{4p}\,dy}{1+y^2}=I^{(1)}(p)+I^{(2)}(p), \tag{17}$$

где

$$\begin{aligned} I^{(1)}(p)&=\frac{8}{\pi}\int_0^{1-\frac{1}{4p+2}}\frac{(1-y^2)^2}{(1-y^{4p+2})^2}\,\frac{y^{4p}\,dy}{1+y^2},\\ I^{(2)}(p)&=\frac{8}{\pi}\int_{1-\frac{1}{4p+2}}^{1}\frac{(1-y^2)^2}{(1-y^{4p+2})^2}\,\frac{y^{4p}\,dy}{1+y^2}. \end{aligned} \tag{18}$$

В интеграле $I^{(2)}(p)$ введем новое независимое переменное

$$z=(1-y)(4p+2), \tag{19}$$

после чего мы будем иметь:

$$I^{(2)}(p)=\frac{8}{\pi}\,\frac{1}{(4p+2)^3}\int_0^1\frac{\left(2-\frac{z}{4p+2}\right)^2}{\left[1+\left(1-\frac{z}{4p+2}\right)^2\right]\left[1-\frac{z}{4p+2}\right]^2}\,\frac{\left(1-\frac{z}{4p+2}\right)^{4p+2}z^2\,dz}{\left[1+\left(1-\frac{z}{4p+2}\right)^{4p+2}\right]^2}.$$

Первый множитель под знаком интеграла ограничен, а второй, возрастая, стремится к $\frac{e^{-z}z^2\,dz}{(2-e^{-z})^2}$. Следовательно,

$$I^{(2)}(p)\leqslant\frac{B}{(4p+2)^3}\int_0^1\frac{e^{-z}z^2\,dz}{(1-e^{-z})^2}\leqslant\frac{C}{2p^3}, \tag{20}$$

где B и C — некоторые постоянные.

В интеграле $I^{(1)}(p)$ имеем:

$$(1-y^{4p+2})^2 < \left[1-\left(1-\frac{1}{4p+2}\right)^{4p+2}\right] < 1-\frac{1}{e},$$

Поэтому

$$I^{(1)}(p) \leqslant B \int_0^{1-\frac{1}{4p+2}} (1-y)^2 y^{4p}\,dy < B\int_0^1 (1-y)^2 y^{4p}\,dy =$$

$$= B\frac{\Gamma(4p+1)\,\Gamma(3)}{\Gamma(4p+4)} < \frac{C}{2p^3}. \tag{21}$$

Отсюда и из (16) получим

$$S(p) < \frac{C}{p^3}. \tag{22}$$

Если теперь

$$A^{\mathrm{I}}(p) = o\,(2p+1)^3, \tag{23}$$

то

$$\delta_1^2 + \delta_2^2 = o\,(1),$$

и, значит,

$$\delta_1^2 + \delta_2^2 = 0. \tag{24}$$

Оценка (23), очевидно, имеет место в условиях теоремы, ибо в наших обозначениях из этих условий вытекает:

$$\frac{1}{4\,(2p+1)}\,[A^{\mathrm{I}^2} + A^{\mathrm{II}^2} + A^{\mathrm{III}^2} + A^{\mathrm{IV}^2}] = o\,(P), \tag{25}$$

откуда и следует (23). Теорема доказана.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
24 IX 1952