Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXVII, № 1

ГИДРОМЕХАНИКА

В. М. ИЕВЛЕВ

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ТЕПЛООБМЕНА ПРИ ТЕЧЕНИИ ГАЗА

(Представлено академиком М. В. Келдышем 28 VIII 1952)

I. В статье [1] было показано, что при выполнении определенных ограничивающих условий возможен пересчет опытных данных по теплообмену и трению, полученных при обтекании несжимаемой жидкостью тел одной формы, на тела другой геометрической формы. В настоящей статье рассматривается аналогичный вопрос применительно к турбулентному течению газа.

Обозначим:

$$\alpha = \frac{\tau_{\text{ст}}}{\bar{\rho}_0 \frac{p}{\bar{p}_0} \bar{u}^2}; \quad \alpha_m = \frac{q_{\text{ст}}}{\bar{\rho}_0 \frac{p}{\bar{p}_0} c_p \bar{t}_0 \bar{u}}; \quad \bar{T}_{\text{ст}} = \frac{T_{\text{ст}}}{\bar{T}_0}; \quad \beta = \frac{\bar{u}}{\sqrt{2c_p \bar{T}_0}};$$

$$\mathrm{Re}_\vartheta = \frac{\bar{u}}{\bar{\mu}_0}\int_0^\delta \rho \frac{u}{\bar{u}}\left(1 - \frac{u}{\bar{u}}\right) dy; \quad \mathrm{Re}_\theta = \frac{\bar{u}}{\bar{\mu}_0}\int_0^\Delta \rho \frac{u}{\bar{u}}\left(1 - \frac{t_0}{\bar{t}_0}\right) dy;$$

$$P = \frac{\bar{\mu}_0}{\bar{\rho}_0 \frac{p}{\bar{p}_0} \bar{u}^2} \frac{d\bar{u}}{dx}; \quad Q = \frac{\bar{\mu}_0}{\bar{t}_0 \bar{\rho}_0 \frac{p}{\bar{p}_0} \bar{u}} \frac{dT_{\text{ст}}}{dx};$$

$$z = \frac{\mathrm{Re}_\vartheta}{\alpha}; \quad z_m = \frac{\mathrm{Re}_\theta}{\alpha_m},$$

где $\tau_{\text{ст}}$ — напряжение силы трения на стенке; $q_{\text{ст}}$ — удельный тепловой поток; $\bar{\rho}_0$ и $\bar{p}_0$ — плотность и давление адиабатически заторможенного потока вне пограничного слоя; $\bar{T}_0$ — температура торможения вне пограничного слоя; $\bar{u}$ — скорость вне пограничного слоя; p — давление; c_p — удельная теплоемкость (не зависящая от температуры); $T_{\text{ст}}$ — температура стенки; $\bar{t}_0 = \bar{T}_0 - T_{\text{ст}}$; $\bar{\mu}_0$ — коэффициент вязкости при температуре $\bar{T}_0$; δ — толщина динамического пограничного слоя; Δ — толщина теплового пограничного слоя; x — координата вдоль стенки; y — координата по нормали к стенке; u — скорость вдоль оси x в пограничном слое; t_0 — разность температуры торможения газа и температуры стенки.

Ниже будет показано, что в некотором диапазоне изменения P и Q можно приближенно принять $z/z_m \approx 1$ и пренебречь влиянием P и Q на α и α_m. Это расширяет возможности моделирования, позволяя использовать одни и те же опытные данные для тел различной формы.

II. Зависимость α и α_m от Re_ϑ и Re_θ можно во всяком небольшом диапазоне изменения Re_ϑ и Re_θ аппроксимировать степенными формулами, которые мы запишем в виде:

$$\alpha = Az^{-n_1} z_m^{-n_2} = Az_m^{-(n_1+n_2)} \left(\frac{z_m}{z}\right)^{n_1};$$
$$\alpha_m = Bz^{-m_1} z_m^{-m_2} = Bz_m^{-(m_1+m_2)} \left(\frac{z_m}{z}\right)^{m_1}. \tag{1}$$

Примем для дальнейшего анализа следующие основные предпосылки, связанные с природой турбулентного движения (те же, что и в [1]):

1) показатели степени n_1, n_2, m_1, m_2 малы по величине (около 0, 1, согласно имеющимся теоретическим и экспериментальным работам);

2) для турбулентного движения характерны «заполненные» профили скоростей и температур.

III. Для оценки ошибки в α и α_m, получающейся, если принять $z_m / z \approx 1$, воспользуемся интегральными соотношениями импульсов и энергии для пограничного слоя, имеющими для плоского движения вид:

$$\frac{1}{\mathrm{Re}_\vartheta} \frac{d\,\mathrm{Re}_\vartheta}{d\,\mathrm{Re}_x} + \frac{P}{1-\beta^2}\left[1 + H - (1 - \overline{T}_{\text{ст}})\, H_m \frac{z_m}{z} \frac{\alpha_m}{\alpha}\right] = \frac{1}{z};$$
$$\frac{1}{\mathrm{Re}_\theta} \frac{d\,\mathrm{Re}_\theta}{d\,\mathrm{Re}_x} - Q = \frac{1}{z_m}, \tag{2}$$

где

$$d\,\mathrm{Re}_x = \frac{\overline{\rho}_0 \frac{p}{p_0} \overline{u}\, dx}{\overline{\mu}_0}, \quad H = \frac{\int\limits_0^\delta \rho \left(1 - \frac{u}{\overline{u}}\right) dy}{\int\limits_0^\delta \rho \frac{u}{\overline{u}}\left(1 - \frac{u}{\overline{u}}\right) dy}, \quad H_m = \frac{\int\limits_0^\Delta \rho \left(1 - \frac{t_0}{\overline{t}_0}\right) dy}{\int\limits_0^\Delta \rho \frac{u}{\overline{u}}\left(1 - \frac{t_0}{\overline{t}_0}\right) dy}.$$

В связи с тем, что профили скоростей и температур в пограничном слое являются «заполненными», величины H и H_m близки к 1 и мало меняются ($H \approx H_m \approx 1{,}2 \div 1{,}3$).

Вычитая соотношения (2) друг из друга, получим:

$$\frac{d}{d\,\mathrm{Re}_x} \ln\left(\frac{\mathrm{Re}_\theta}{\mathrm{Re}_\vartheta}\right) = \frac{1}{z_m}\left[1 + z_m P \frac{1 - \overline{T}_{\text{ст}}}{1-\beta^2} H_m \frac{\alpha_m}{\alpha}\right]\left[\left(\frac{z_m}{z}\right)_0 - \frac{z_m}{z}\right], \tag{3}$$

где

$$\left(\frac{z_m}{z}\right)_0 = \frac{1 + z_m\left[Q + P\,\frac{1+H}{1-\beta^2}\right]}{1 + z_m P \,\frac{1 - \overline{T}_{\text{ст}}}{1-\beta^2} H_m \frac{\alpha_m}{\alpha}}. \tag{4}$$

Из этого уравнения можно сделать следующий приближенный вывод: величина z_m / z в каждом месте обтекаемого тела изменяется в направлении приближения к $(z_m / z)_0$*. Если на каком-либо участке обтекаемой стенки величины $(z_m / z)_0$, определяемые по (4), и начальное значение z_m / z заключены в некоторых пределах, то в этих же пределах будет изменяться на рассматриваемом участке и отношение z_m / z. Следовательно, если при расчете α и α_m приближенно принять $z_m / z \approx 1$, то относительная ошибка в α и α_m ($\Delta\alpha / \alpha$ и $\Delta\alpha_m / \alpha_m$), согласно (1), составит:

---

* Если $1 + z_m P \,\frac{1 - \overline{T}_{\text{ст}}}{1-\beta^2} H_m \frac{\alpha_m}{\alpha} > 0$ и $\left(\frac{z_m}{z}\right)_0 > 0$.

$$\left|\frac{\Delta\alpha}{\alpha}\right| = \left|\left(\frac{z_m}{z}\right)^{n_1} - 1\right| \approx n_1\left|\frac{z_m}{z} - 1\right| \leqslant 0,1\left|\left(\frac{z_m}{z}\right)_0 - 1\right|_{\max};$$
$$\left|\frac{\Delta\alpha_m}{\alpha_m}\right| \leqslant 0,1\left|\left(\frac{z_m}{z}\right)_0 - 1\right|_{\max} \qquad (5)$$

(принято $n_1 \approx m_1 \approx 0,1$); индекс max в правой части указывает, что должно быть взято максимальное на рассматриваемом участке стенки значение $|(z_m/z)_0 - 1|$.

В формуле (4) для $(z_m/z)_0$ α_m/α близко к 1; при $\beta = 0$ (малые числа M) и $\overline{T}_{\text{ст}} = 1$ эта формула совпадает с соответствующей формулой для несжимаемой жидкости, полученной в [1]. Анализ (4) показывает, что при заданной допустимой ошибке в α и α_m величина Q может изменяться примерно в одинаковых пределах и для газа, и для несжимаемой жидкости; величина P для газа может при $\overline{T}_{\text{ст}} < 1$ изменяться в более широких, а при $\overline{T}_{\text{ст}} > 1$ — в более узких пределах, чем для несжимаемой жидкости.

IV. Величины P и Q могут влиять на α и α_m, изменяя профиль скоростей и температур в пограничном слое. Для оценки влияния P на профиль τ воспользуемся уравнением движения:

$$\frac{\partial\tau}{\partial y} = -\bar{\rho}\bar{u}\frac{d\bar{u}}{dx} + \rho u\frac{\partial u}{\partial x} + \rho V\frac{\partial u}{\partial y}, \qquad (6)$$

где $\bar{\rho}$ — плотность вне пограничного слоя, V — скорость вдоль оси y.

Преобразуя (6), пренебрегая влиянием членов, содержащих V и $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u}{\bar{u}}\right)$, интегрируя по y и используя (4), получим:

$$\left|1 - \frac{\tau}{\tau_{\text{ст}}}\right| = \frac{|P|\,\bar{u}}{(1-\beta^2)\,\alpha\bar{\mu}_0}\left|\left\{\int_0^y \rho\frac{u}{\bar{u}}\left(1 - \frac{u}{\bar{u}}\right)dy + \int_0^y \rho\left(1 - \frac{u}{\bar{u}}\right)dy - \right.\right.$$
$$\left.\left. - (1 - \overline{T}_{\text{ст}})\int_0^y \rho\left(1 - \frac{t_0}{\overline{T}_0}\right)dy\right\}\right| < \frac{|P|\,\bar{u}}{(1-\beta^2)\,\alpha\bar{\mu}_0}\left|\int_0^\delta \rho\frac{u}{\bar{u}}\left(1 - \frac{u}{\bar{u}}\right)dy + \right.$$
$$\left. + \int_0^\delta \rho\left(1 - \frac{u}{\bar{u}}\right)dy - (1 - \overline{T}_{\text{ст}})\int_0^\Delta \rho\left(1 - \frac{t_0}{\bar{t}_0}\right)dy\right| \approx \left|1 - \left(\frac{z}{z_m}\right)_0\right|_{Q=0}. \qquad (7)$$

Аналогичный результат был получен в [1] для несжимаемой жидкости. Там было показано, что из (7) следует возможность пренебречь влиянием P на α и α_m, если величина P такова, что можно принимать $z_m/z \approx 1$. Для газа приведенные в [1] выводы также справедливы; мы не будем их здесь воспроизводить.

Аналогичный сделанному в [1] вывод получается также относительно влияния Q.

Параметры P и Q могут влиять на характеристики турбулентности в пограничном слое и, тем самым, на α и α_m. В настоящей статье не рассматривается, какими величинами должен ограничиваться диапазон изменения P и Q с этой точки зрения.

V. Для определения z_m подставим в (2) $\mathrm{Re}_\theta = z_m\alpha_m$ и $Q = -\frac{1}{1 - \overline{T}_{\text{ст}}}\frac{d(1 - \overline{T}_{\text{ст}})}{d\,\mathrm{Re}_x}$:

$$\frac{dz_m}{d\,\mathrm{Re}_x} + \frac{z_m}{\alpha_m}\frac{d\alpha_m}{d\,\mathrm{Re}_x} + \frac{z_m}{1 - \overline{T}_{\text{ст}}}\frac{d(1 - \overline{T}_{\text{ст}})}{d\,\mathrm{Re}_x} = 1. \qquad (8)$$

Принимая приближенно, согласно (I), $\frac{z_m}{\alpha_m}\frac{d\alpha_m}{d\,\mathrm{Re}_x} \approx -(m_1+m_2)\frac{dz_m}{d\,\mathrm{Re}_x}$ и полагая $\frac{1}{1-m_1-m_2} \approx 1{,}2$, получим решение (8) в следующем виде:

$$z_m(x) = z_m(0)\left[\frac{1-\overline{T}_{\text{ст}}(0)}{1-\overline{T}_{\text{ст}}(x)}\right]^{1,2} + 1{,}2\int_0^x \left[\frac{1-\overline{T}_{\text{ст}}(x_1)}{1-\overline{T}_{\text{ст}}(x)}\right]^{1,2} \frac{\overline{\rho}_0 \frac{p(x_1)}{\overline{p}_0}\overline{u}(x_1)}{\overline{\mu}_0}\,dx_1. \quad (9)$$

Величина $z_m(0)$ определяется из расчета ламинарного или турбулентного пограничного слоя на предшествующем рассматриваемому участке обтекаемого тела (до $x=0$).

При обтекании тела вращения величина z_m определяется так:

$$z_m(x) = z_m(0)\left[\frac{1-\overline{T}_{\text{ст}}(0)}{1-\overline{T}_{\text{ст}}(x)}\right]^{1,2}\left[\frac{D(0)}{D(x)}\right]^{1,2} +$$

$$+ 1{,}2\int_0^x \left[\frac{1-\overline{T}_{\text{ст}}(x_1)}{1-\overline{T}_{\text{ст}}(x)}\right]^{1,2}\left[\frac{D(x_1)}{D(x)}\right]^{1,2} \frac{\overline{\rho}_0 \frac{p(x_1)}{\overline{p}_0}\overline{u}(x_1)}{\overline{\mu}_0}\,dx_1, \quad (10)$$

где D — диаметр тела вращения.

VI. Для получения приближенных формул для α и α_m применим к случаю течения газа те же формулы, которые были получены нами для несжимаемой жидкости ([1]), но подставим в них величину ρ при средней температуре в пограничном слое $\left(T_m = \frac{T_{\text{ст}}+\overline{T}_0}{2} - \frac{1}{2c_p}\left(\frac{\overline{u}}{2}\right)^2\right)$, а величины λ (коэффициент теплопроводности) и μ, которые существенны только в ламинарном подслое, — при средней температуре ламинарного подслоя $\left(T_{l\ \text{ср}} = \frac{3T_{\text{ст}}+\overline{T}_0}{4} - \frac{1}{2c_p}\left(\frac{\overline{u}}{4}\right)^2\right)$. Примем $\mu \sim T^{0,7}$; $\lambda \sim T^{0,7}$.

Применение указанных определяющих температур для расчета числа Нуссельта при движении газа в трубе по экспериментальной формуле для несжимаемой жидкости дает удовлетворительно согласующиеся с опытом результаты.

Для α и α_m получаются следующие соотношения (при $z \approx 10^5 \div 10^9$):

$$\alpha = (0{,}0331 z_m^{-0,221} + 4\cdot 10^{-4})\,j; \quad \alpha_m = \frac{j}{41{,}5 z_m^{0,1692}\mathrm{Pr}^{0,6} + 35{,}3 z_m^{0,08}};$$

$$j = \left(\frac{2}{1+\overline{T}_{\text{ст}} - \beta^2/2}\right)^{0,85}\left(\frac{1+3\overline{T}_{\text{ст}} - \beta^2/4}{4}\right)^{0,105}. \quad (11)$$

Изложенный метод расчета не меняется при применении вместо (11) других формул.

VII. Рекомендуется следующий порядок расчета трения и теплообмена: 1) определить z_m по (9) или (10) и затем найти α и α_m по (11); 2) определить по (5) максимально возможную относительную ошибку в α и α_m.

Поступило
1 VII 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. М. Иевлев, ДАН, 86, № 6 (1952).