Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXVII, № 2

МАТЕМАТИКА

И. М. ГЛАЗМАН

О ХАРАКТЕРЕ СПЕКТРА МНОГОМЕРНЫХ СИНГУЛЯРНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 10 IX 1952)

Настоящая заметка посвящена исследованию расположения непрерывной части спектра краевой задачи, связанной с многомерной дифференциальной операцией второго порядка вида

$$l[u] = -\Delta u + q(P)u, \qquad (1)$$

рассматриваемой во всем n-мерном евклидовом пространстве $\mathcal{E}$ (для краткости принято $n=3$). Функция $q(P)$ точки $P \in \mathcal{E}$ предполагается непрерывной. Ниже используются метод, терминология и обозначения заметки [1].

Операция (1) порождает в гильбертовом пространстве $\mathcal{L}_2(\mathcal{E})$ минимальный оператор L и максимальный оператор M. Оператор L можно определить как замыкание симметрического оператора L', порожденного операцией (1) на многообразии всех дважды непрерывно дифференцируемых в $\mathcal{E}$ финитных функций. Оператор M можно определить равенством $M = L^*$. Нетрудно проверить, что при $q(P) \equiv 0$ будет $L^* = L$, так что $\operatorname{def} L = 0$. Отсюда следует, что при условии ограниченности функции $q(P)$ в $\mathcal{E}$ также будет $\operatorname{def} L = 0$. Это соотношение остается верным, если предположить лишь полуограниченность снизу функции $q(P)$ [5].

Если $\operatorname{def} L \neq 0$, то оператор L допускает различные самосопряженные расширения $\tilde{L}$, но теперь, в отличие от одномерного случая, непрерывная часть спектра $\mathbf{C}(\tilde{L})$ зависит от выбора $\tilde{L}$ (за исключением случая, когда $\operatorname{def} L < \infty$). Условимся называть ядром $\mathbf{C}(L)$ спектров самосопряженных расширений оператора L общую часть множеств $\mathbf{C}(\tilde{L})$ при всевозможном выборе $\tilde{L}$ и фиксированном L. Таким образом, если $\lambda \in \mathbf{C}(L)$, то при любом $\tilde{L} \supset L$ будет $\lambda \in \mathbf{C}(\tilde{L})$.

Ряд приводимых ниже критериев связан с поведением функции $q(P)$ в областях Ω, не совпадающих со всем пространством $\mathcal{E}$; при этом на поведение функции $q(P)$ вне Ω никаких ограничений (кроме требования непрерывности) не накладывается. Для удобства формулировки таких критериев примем следующую классификацию областей пространства.

Пусть Ω означает любую (связную или несвязную, ограниченную или неограниченную) область пространства $\mathcal{E}$. Область Ω назовем квази-конической, если она содержит сферы любого радиуса; если область Ω не является квази-конической, но содержит бесконечную совокупность одинаковых непересекающихся сфер, то назовем ее квази-цилиндрической; если, наконец, область Ω не содержит и такой совокупности сфер, то назовем ее квази-ограниченной. Таким образом, любая область Ω из $\mathscr{E}$ принадлежит одному из введенных типов.

Теорема 1. *Пусть Ω — некоторая квази-коническая область пространства $\mathscr{E}$ и пусть $\mathbf{M}_\eta$ означает множество тех точек $P \in \Omega$, для которых $|q(P)| > \eta$. Если при каждом $\eta > 0$ существует интеграл $\int\limits_{\mathbf{M}_\eta} |q(P)|^2 dv$, то $[0, \infty) \subset \mathbf{C}(L)$.*

Доказательство. Положим, как в ([1]),

$$\varphi_1(x) \equiv \varphi_1(x; \lambda, \varepsilon) = \sqrt{\varepsilon}\, \varphi_0(\varepsilon x) \exp\left(i \sqrt{\lambda}\, x\right), \tag{2}$$

где $\varphi_0(x)$ — некоторая фиксированная дважды непрерывно дифференцируемая на оси финитная функция. Отправляясь от функции $\varphi_1(x)$, построим систему функций $\mathfrak{S} = \{u_k(P)\}_1^\infty$ по формуле

$$u_k(P) = u_k(P; \lambda, \varepsilon) = \varphi_1\left(x - \alpha_k; \lambda, \frac{\varepsilon}{3}\right) \varphi_1\left(y - \beta_k; 0, \frac{\varepsilon}{3}\right) \varphi_1\left(z - \gamma_k, 0, \frac{\varepsilon}{3}\right), \tag{3}$$

где x, y, z — декартовы координаты точки P.

Построенная система функций $\mathfrak{S}$ обладает следующими свойствами (см. ([1])):

а) функции $u_k(P)$ финитны и принадлежат D_L;

б) если τ_s означает наименьший куб, вне которого $u_s(P) = 0$, то $\tau_k \cap \tau_r = 0$ при $k \neq r$;

в) $\| \Delta u_k + \lambda u_k \| < \varepsilon \| u_k \|$.

Далее, из (2) и (3) следует, что функции $u_k(P; \lambda, \varepsilon)$ при различных k, λ и ε имеют одну и ту же норму в $\mathscr{L}_2(\mathscr{E})$, а также предельное соотношение

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{P \in \Omega} |u_k(P; \lambda, \varepsilon)| = 0, \tag{4}$$

причем величина за знаком lim не зависит от k и λ.

Пусть теперь $\lambda > 0$ и $\widetilde{L}$ — любое самосопряженное расширение оператора L. Требуется доказать, что $\lambda \in \mathbf{C}(\widetilde{L})$. Зададимся числом $\varepsilon > 0$ и выберем числа $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$ так, чтобы вне Ω было $u_k(P) = 0$. Такой выбор чисел $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$ возможен при любом $\varepsilon > 0$, так как, согласно условию теоремы, область Ω содержит сферы любого радиуса. Задавшись еще числом $\eta > 0$, получаем для любой функции $u_k(P)$ из $\mathfrak{S}$

$$\| \widetilde{L u_k} - \lambda u_k \| \leqslant \| \Delta u_k + \lambda u_k \| + \| q u_k \| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon \| u_k \| + \left[\int\limits_{\Omega - \mathbf{M}_\eta} |q(P) u_k(P)|^2 dv \right]^{1/2} + \left[\int\limits_{\mathbf{M}_\eta} |q(P) u_k(P)|^2 dv \right]^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon \| u_k \| + \sup_{P \in \Omega - \mathbf{M}_\eta} |q(P)| \cdot \| u_k \| + \sup_{P \in \Omega} |u_k(P)| \cdot I_\eta \leqslant (\varepsilon + \eta + I_\eta \delta_\varepsilon) \| u_k \|, \tag{5}$$

где

$$I_\eta^2 = \int\limits_{\mathbf{M}_\eta} |q(P)|^2 dv, \quad \delta_\varepsilon = \| u_k \|^{-1} \sup_{P \in \Omega} |u_k(P)|.$$

Образуем теперь линейную оболочку G_ε последовательности $\{u_k(P)\}_1^\infty$. Из а), б), в) и (5) для любой функции $u(P) \in G_\varepsilon$ получаем неравенство

$$\| \tilde{L}u - \lambda u \| \leqslant \rho(\varepsilon, \eta) \| u \|,$$

где $\rho(\varepsilon, \eta) = \varepsilon + I_\eta \delta_\varepsilon + \eta$. Отсюда на основании леммы ([1]) заключаем, что $\mathbf{C}(\tilde{L}) \cap [\lambda - \rho(\varepsilon, \eta), \lambda + \rho(\varepsilon, \eta)] \neq 0$, а так как число $\varepsilon > 0$ произвольно, то, в силу (4), $\mathbf{C}(\tilde{L}) \cap [\lambda - \eta, \lambda + \eta] \neq 0$, но число $\eta > 0$ также произвольно, так что $\lambda \in \mathbf{C}(\tilde{L})$, ч. т. д.

Из доказанной теоремы выводится ряд более простых достаточных условий выполнения соотношения $[0, \infty) \subset \mathbf{C}(L)$. Таковым, например, является каждое из следующих условий:

1) $\lim q(P) = 0$ при $|OP| \to \infty$, $P \in \Omega$ (случай $\Omega = \mathcal{E}$ см. в ([1]));

2) функция $q(P)$ ограничена в Ω и при $|OP| \to \infty$, $P \in \Omega$ стремится к нулю по мере;

3) при некотором $p > 0$ существует интеграл $\int\limits_\Omega |q(P)|^p dv$ (если $p < 2$, то дополнительно требуется ограниченность $q(P)$ в Ω).

Доказательство приводимых ниже теорем проводится по схеме доказательства теоремы 1.

Теорема 2. *Если в некоторой квази-конической области Ω при $|OP| \to \infty$ величина $\omega(q) = \limsup q(P) - \liminf q(P) < \infty$, то при любом $\lambda > 0$ будет $[\lambda, \lambda + \omega] \cap \mathbf{C}(L) \neq 0$.*

Если условие $\lim q(P) = 0$ при $|OP| \to \infty$ выполняется лишь в некоторой квази-цилиндрической области, то соотношение $[0, \infty) \subset \mathbf{C}(L)$ может оказаться неверным, но имеет место следующая теорема.

Теорема 3. *Если внутри некоторой квази-цилиндрической области Ω выполняется предельное соотношение $\lim q(P) = 0$ при $|OP| \to \infty$ $(P \in \Omega)$, то ядро спектра $\mathbf{C}(L)$ протсирается в $+\infty$, т. е. $\mathbf{C}(L) \cap (N, \infty) \neq 0$ при любом N.*

Заключение этой теоремы остается верным, если при $|OP| \to \infty$, $P \in \Omega$ $\limsup q(P) - \liminf q(P) < \infty$. Для больших значений λ во всех случаях имеет место соотношение $[\lambda - \rho(\lambda), \lambda + \rho(\lambda)] \cap \mathbf{C}(L) \neq 0$, где $\rho(\lambda) = a\sqrt{\lambda} + b$.

Предположим теперь, что дифференциальная операция (1) рассматривается в некоторой области Ω с границей S (удовлетворяющей некоторым условиям регулярности) и $q(P) \equiv 0$. Обозначим через $\tilde{L}$ самосопряженный оператор, порождаемый операцией $-\Delta$ и краевым условием: $u(P) = 0$ при $P \in S$. Из теорем 2 и 3 следует, что в случае, когда область Ω квази-коническая, будет $[0, \infty) \subset \mathbf{C}(\tilde{L})$, а в случае, когда область Ω квази-цилиндрическая, множество $\mathbf{C}(\tilde{L})$ простирается в бесконечность. С другой стороны, А. М. Молчанов недавно обнаружил ([4]), что в случае квази-ограниченной области будет $\mathbf{C}(\tilde{L}) = 0$. Таким образом, пользуясь результатом А. М. Молчанова, приходим к следующей альтернативе: *какова бы ни была область Ω (с регулярной границей S), непрерывная часть спектра краевой задачи, определяемой операцией $-\Delta$ с краевым условием $u(P) = 0$ $(P \in S)$, либо отсутствует, либо простирается в $+\infty$.*

Пользуясь леммой ([1]), можно для операции (1) получить результат, соответствующий теоремам 3 и 4а ([1]) для случая полуоси. С этой целью следует вместе с операцией (1) ввести операции l_1 и l_2, где $q_1(P) = q_1(r) = \inf q(P)$ и $q_2(P) = q_2(r) = \sup q(P)$ при $|OP| = r$ $(0 \leqslant r < \infty)$. Путем сравнения оператора L с L_1 и L_2 устанавливается следующая теорема.

Теорема 4. *Если $\lim q(P) = q_0$ при $|OP| \to \infty$, $P \in \mathcal{E}$, то $(-\infty, q_0) \cap \mathbf{C}(L) = 0$. Если $\lim q(P) = -0$ при $|OP| \to \infty$, $P \in \mathcal{E}$, и $r_k \int\limits_{r_k}^{\infty} |q_1(r)|\, dr > 1$ для некоторой последовательности $r_k \to \infty$, то* *точка $\lambda = 0$ является предельной для отрицательных собственных значений оператора L (при условиях теоремы* $\operatorname{def} L = 0$).

Если, в частности, $q_0 = \infty$, то теорема 4 дает распространение известного критерия Вейля (см. ([3])) на многомерный случай. Впрочем, этот критерий Вейля для операции (1) следует из полученного А. М. Молчановым ([4]) необходимого и достаточного условия дискретности спектра (в предположении полуограниченности снизу функции $q(P)$).

Харьковский политехнический институт
им. В. И. Ленина

Поступило
10 IX 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. М. Глазман, ДАН, 87, № 1 (1952). [2] И. М. Глазман, ДАН, 80, 153 (1951). [3] Б. М. Левитан, Разложение по собственным функциям..., 1950. [4] А. М. Молчанов, ДАН, 83, 17 (1952). [5] T. Carleman, Ark. f. Math., Astr. och Fysik, 24 B, No. 11 (1934).