Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXVII, № 2

МАТЕМАТИКА

Д. Л. БЕРМАН

РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ИНТЕРПОЛЯЦИИ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 15 IX 1952)

1°. Постановка задачи. Пусть задана произвольная последовательность точек:

$$-1 \leqslant x_n^{(n)} < x_{n-1}^{(n)} < \cdots < x_0^{(n)} \leqslant 1, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (m)$$

Через $\{l_j^{(n)}(x)\}_{j=0}^n$ мы обозначим соответствующие фундаментальные интерполяционные полиномы Лагранжа, построенные для последовательности чисел (m), т. е.

$$l_j^{(n)}(x) = \frac{\omega_n(x)}{\left(x - x_j^{(n)}\right)\omega_n'\left(x_j^{(n)}\right)}, \quad \omega_n(x) = \prod_{j=0}^{n}\left(x - x_j^{(n)}\right).$$

Рассмотрим величину

$$M_n^{(k)}(m) = \max_{x \in [-1, 1]} \sum_{j=0}^{n} \left| \left[l_j^{(n)}(x) \right]^{(k)} \right|,$$

где k — любое натуральное число $\geqslant 1$.

Положим, что $(\mathfrak{M})$ есть совокупность всевозможных систем чисел вида (m).

Требуется для произвольного целого $k \geqslant 1$ найти величину

$$\lambda_n^{(k)} = \inf_{m \in \mathfrak{M}} M_n^{(k)}(m)$$

и указать систему точек* m_0, для которой

$$\lambda_n^{(k)} = M_n^{(k)}(m_0). \qquad (1)$$

2°. Решение задачи пункта 1° вытекает из следующей теоремы.

Теорема 1. *Среди всех систем точек вида* (m) *существует единственная система точек*

$$x_j^{(n)} = \cos\frac{j\pi}{n}, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, n, \qquad (m_0)$$

* Существование системы точек m_0, для которой имеет место (1), следует из того факта, что $M_n^{(k)}$ есть непрерывная функция от $x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)}$.

для которой величина $M_n^{(k)}(m)$ достигает наименьшего значения при любом целом значении $k \geqslant 1$. Это наименьшее значение равно $T_n^{(k)}(1)$, где $T_n(x) = \cos n \arccos x$.

Таким образом:

$$\lambda_n^{(k)} = M_n^{(k)}(m_0) = T_n^{(k)}(1). \tag{2}$$

Доказательство. Для любой последовательности точек (m) построим интерполяционный полином Лагранжа

$$L_n(f, x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j)\, l_j(x).$$

Хорошо известно, что полином $L_n(f, x)$ обладает тем свойством, что для любого многочлена $P(x)$ степени не выше n

$$L_n(P, x) \equiv P(x).$$

Значит,

$$L_n^{(k)}(P, x) \equiv P^{(k)}(x).$$

В частности,

$$\sum_{j=0}^{n} T_n(x_j)\,[l_j(x)]^{(k)} \equiv T^{(k)}(x). \tag{3}$$

Так как $|T_n(x)| \leqslant 1$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$, то из тождества (3) следует, что

$$\sum_{j=0}^{n} \left| [l_j(x)]^{(k)} \right| \geqslant \left| T_n^{(k)}(x) \right|.$$

Стало быть *,

$$M_n^{(k)}(m) \geqslant T_n^{(k)}(1). \tag{4}$$

Поэтому

$$\lambda_n^{(k)} \geqslant T_n^{(k)}(1). \tag{5}$$

Из неравенства (4), в частности, следует, что

$$M_n^{(k)}(m_0) \geqslant T_n^{(k)}(1). \tag{6}$$

С другой стороны, Даффин ** и Шеффер (1) доказали следующую теорему:

Если полином $P(x)$ степени не выше n удовлетворяет неравенствам

$$\left| P\left(\cos \frac{j\pi}{n}\right) \right| \leqslant 1, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, n,$$

то при любом целом $k \geqslant 1$

$$\left| P^{(k)}(x) \right| \leqslant T_n^{(k)}(1), \quad -1 \leqslant x \leqslant 1, \tag{7}$$

---

* Число $T_n^{(k)}(1)$ положительно.

** Пользуюсь случаем отметить, что теорема 1 моей работы (2) вытекает из теоремы Даффина и Шеффера (1), о которой я узнал уже после выхода из печати моей статьи. Мое доказательство теоремы 1 является более элементарным и существенно отличается от доказательства Даффина и Шеффера.

причем в (7) *имеет место равенство лишь при* $P(x)=\gamma T_n(x)$, *где* $|\gamma|=1$.

Эта теорема позволяет нам оценить сверху $\lambda_n^{(k)}$.

Рассмотрим теперь сумму $\sum_{j=0}^{n}\left|l_j^{(k)}(x)\right|$ при условии, что фундаментальные полиномы Лагранжа построены для последовательности точек (m_0). Пусть эта сумма достигает наибольшего значения в интервале $[-1, 1]$ при $x=x^*$.

Очевидно, что многочлен степени не выше n

$$R(m_0, x)=R(x)=\sum_{j=0}^{n}\operatorname{sign} l_j^{(k)}(x^*)\, l_j(x)$$

удовлетворяет неравенствам

$$\left|R\left(\cos\frac{j\pi}{n}\right)\right|\leqslant 1, \quad j=0, 1, 2, \ldots, n.$$

Стало быть, по теореме Даффина и Шеффера,

$$|R^{(k)}(x)|\leqslant T_n^{(k)}(1), \quad -1\leqslant x\leqslant 1.$$

В частности,

$$|R^{(k)}(x^*)|\leqslant T_n^{(k)}(1). \tag{8}$$

Из определения полинома $R(x)$ следует, что

$$R^{(k)}(x^*)=\sum_{j=0}^{n}\left|l_j^{(k)}(x^*)\right|.$$

Поэтому неравенство (8) может быть записано в виде:

$$M_n^{(k)}(m_0)\leqslant T_n^{(k)}(1). \tag{9}$$

Значит,

$$\lambda_n^{(k)}\leqslant T_n^{(k)}(1). \tag{10}$$

Неравенства (5), (6), (9) и (10) приводят к заключению, что

$$\lambda_n^{(k)}=M_n^{(k)}(m_0)=T_n^{(k)}(1).$$

Остается еще доказать, что система точек (m_0), для которой $M_n^{(k)}(m)$ достигает наименьшего значения, единственная.

Допустим, что система точек

$$-1\leqslant \tilde{x}_n^{(n)}<\tilde{x}_{n-1}^{(n)}<\cdots<\tilde{x}_0^{(n)}\leqslant 1 \tag{$\tilde{m}$}$$

отлична от системы (m_0).

В таком случае из результатов Даффина и Шеффера [1] следует, что существует полином $\tilde{P}(x)$ степени n такой, что

$$|\tilde{P}(\tilde{x}_j^{(n)})|\leqslant 1, \quad j=0, 1, 2, \ldots, n, \tag{11}$$

и

$$\max_{-1\leqslant x\leqslant 1}\left|\widetilde{P}^{(k)}(x)\right|>T_n^{(k)}(1). \tag{12}$$

Пусть $\{\widetilde{l}_j(x)\}_{j=0}^n$ суть фундаментальные полиномы Лагранжа, построенные для узлов $(\widetilde{m})$.

Очевидно, что

$$\widetilde{P}^{(k)}(x)=\sum_{j=0}^{n}\widetilde{P}(\widetilde{x}_j)\left[\widetilde{l}_j^{(n)}(x)\right]^{(k)}. \tag{13}$$

Из (11) и (13) следует, что

$$\max_{-1\leqslant x\leqslant 1}\left|\widetilde{P}^{(k)}(x)\right|\leqslant M_n^{(k)}(\widetilde{m}). \tag{14}$$

Неравенства (12) и (14) приводят к заключению, что

$$M_n^{(k)}(\widetilde{m})>T_n^{(k)}(1). \tag{15}$$

Наконец, из (2) и (15) вытекает, что

$$M_n^{(k)}(m_0)>M_n^{(k)}(\widetilde{m}).$$

3°. Введем следующие обозначения: k есть любое натуральное число $\geqslant 1$; y есть любое вещественное число, $-\infty<y<\infty$; $\{l_j(z)\}_{j=0}^n$ суть фундаментальные полиномы Лагранжа, построенные для произвольной системы узлов (m).

Положим

$$M_n^{(k)}(m, y)=\max_{-1\leqslant x\leqslant 1}\sum_{j=0}^{n}\left|\left[l_j^{(n)}(x+yi)\right]^{(k)}\right|.$$

Рассмотрим величину

$$\lambda_n^{(k)}(y)=\inf_{m\in\mathfrak{M}} M_n^{(k)}(m, y).$$

Теорема 2. *Среди всех систем точек вида* (m) *существует единственная система точек* (m_0), *для которой имеют место равенства*

$$\lambda_n^{(k)}(y)=M_n^{(k)}(m_0, y)=\left|T_n^{(k)}(1+yi)\right|.$$

Очевидно, что теорема 1 есть частный случай теоремы 2.

Доказательство теоремы 2 почти не отличается от доказательства теоремы 1. В данном случае следует воспользоваться теоремой 2 из работы (1).

Теорема 1 без особого труда обобщается на многомерный случай.

Поступило
29 VIII 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1 R. J. Duffin, A. C. Schaeffer, Trans. Am. Math. Soc., **50**, № 3, 517 (1941).
2 Д. Л. Берман, ДАН, **84**, № 2 (1952).