Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXVII, № 1

МЕХАНИКА

И. С. АРЖАНЫХ

УСЛОВИЯ ПРИМЕНИМОСТИ ПОТЕНЦИАЛЬНОГО МЕТОДА ИНТЕГРИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ НЕГОЛОНОМНЫХ КОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМ

(Представлено академиком А. И. Некрасовым 1 IX 1952)

С. А. Чаплыгин впервые показал (1), что в некоторых случаях уравнения движения неголономных систем можно интегрировать методом Гамильтона — Якоби. Из этой работы, в частности, следует, что неголономные системы не всегда допускают такой метод. Поэтому естественно возникает вопрос о тех условиях, которым должны удовлетворять неголономные системы для применимости к ним метода Гамильтона — Якоби. Один из способов получения этих условий указан в нашей работе (2), другой способ намечен в статье (3). Будем придерживаться метода статьи (3).

Наиболее отчетливо качественное отличие систем голономных от неголономных выявляется при изучении поля импульсов

$$p_\nu = p_\nu(t, q_1, q_2, \ldots, q_n), \quad \nu = 1, 2, \ldots, n. \tag{1}$$

Рассмотрим вначале консервативные системы без связей. Уравнения движения возьмем в форме Гамильтона

$$\dot{q}_\nu = \frac{\partial H}{\partial p_\nu}, \quad \dot{p}_\nu = -\frac{\partial H}{\partial q_\nu}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n. \tag{2}$$

Если канонический потенциал H вычислим с точки зрения теории поля импульсов, то будем иметь

$$H(t, q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n) \equiv \widetilde{H}(t, q_1, \ldots, q_n). \tag{3}$$

Следовательно,

$$\frac{\partial H}{\partial q_\nu} = \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial q_\nu} - \sum_{\mu=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_\mu}\frac{\partial p_\mu}{\partial q_\nu} = \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial q_\nu} - \sum_{\mu=1}^{n} \frac{\partial p_\mu}{\partial q_\nu}\dot{q}_\mu, \tag{4}$$

$$\dot{p}_\nu = \frac{\partial p_\nu}{\partial t} + \sum_{\mu=1}^{n} \frac{\partial p_\nu}{\partial q_\mu}\dot{q}_\mu, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n. \tag{5}$$

Поэтому уравнения движения представляются в вихревой форме

$$\frac{\partial p_\nu}{\partial t} + \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial q_\nu} + \sum_{\mu=1}^{n}\left(\frac{\partial p_\nu}{\partial q_\mu} - \frac{\partial p_\mu}{\partial q_\nu}\right)\dot{q}_\mu = 0. \tag{6}$$

Эти уравнения тождественно удовлетворяются, если положить

$$p_\nu = \frac{\partial W}{\partial q_\nu}, \quad \frac{\partial W}{\partial t} + \widetilde{H} = 0. \tag{7}$$

Таким образом, метод Гамильтона — Якоби обладает тем аналитическим свойством, что поле импульсов имеет потенциал W. В связи с этим мы будем в дальнейшем называть его **потенциальным методом интегрирования**.

Перейдем теперь к основной теме настоящего сообщения.

Пусть на систему наложены связи

$$\omega_\rho(\delta) \equiv \sum_{\nu=1}^{n} A_{\rho\nu}\,\delta q_\nu = 0, \quad \rho = 1, 2, \ldots, r < n-1, \tag{8}$$

причем как связи, так и кинетический потенциал

$$L = \frac{1}{2}\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu}\,\dot{q}_\mu\,\dot{q}_\nu + U \tag{9}$$

будем предполагать для упрощения не зависящими явно от времени t. Возможность потенциального метода в применении к данным системам связана с таким выбором импульсов p_ν, чтобы имело место равенство

$$\omega(\delta) \equiv \sum_{\nu=1}^{n} p_\nu\,\delta q_\nu = \delta W \tag{10}$$

при условиях (8). Импульсы определим по Пуассону — Лежандру:

$$p_\nu = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\nu}, \quad \dot{q}_\nu = \frac{\partial H}{\partial p_\nu}, \quad H = -L + \sum_{\nu=1}^{n} p_\nu\,\dot{q}_\nu. \tag{11}$$

Из (10) и (8) следует:

$$p_\nu = \frac{\partial W}{\partial q_\nu} + \sum_{\rho=1}^{r} M_\rho\,A_{\rho\nu}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n, \tag{12}$$

причем множители определяются из уравнений

$$\sum_{\nu=1}^{n} A_{\rho\nu}\frac{\partial H}{\partial p_\nu} = 0, \quad \rho = 1, 2, \ldots, r. \tag{13}$$

Затем рассмотрим уравнения движения. Имеем аналитическую форму принципа Даламбера — Лагранжа

$$\sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_\nu} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\nu}\right)\delta q_\nu = 0, \tag{14}$$

или, в силу (11),

$$\sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial q_\nu} + \frac{dp_\nu}{dt}\right)\delta q_\nu = 0. \tag{15}$$

Для стационарного поля импульсов отсюда находим

$$\sum_{\nu=1}^{n}\left[\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial q_\nu} + \sum_{\mu=1}^{n}\left(\frac{\partial p_\nu}{\partial q_\mu} - \frac{\partial p_\mu}{\partial q_\nu}\right)\frac{dq_\mu}{dt}\right]\delta q_\nu = 0. \tag{16}$$

Среди возможных перемещений δq_ν находятся и действительные dq_ν. Поэтому имеет место интеграл энергии

$$H = h = \text{const}. \tag{17}$$

Будем рассматривать данный интеграл при фиксированном значении постоянной h для всего поля импульсов. Тогда вдоль действительного движения

$$\sum_{(\mu,\nu)} \left(\frac{\partial p_\nu}{\partial q_\mu} - \frac{\partial p_\mu}{\partial q_\nu}\right)(dq_\mu \delta q_\nu - \delta q_\mu dq_\nu) = 0. \tag{18}$$

Следовательно, принцип Даламбера — Лагранжа с точки зрения теории поля выражает равенство нулю производной пфаффовой формы $\omega(\delta)$:

$$\omega'(d,\delta) = 0, \quad \omega' \equiv \sum_{(\mu,\nu)} \left(\frac{\partial p_\nu}{\partial q_\mu} - \frac{\partial p_\mu}{\partial q_\nu}\right)[dq_\mu\, dq_\nu]. \tag{19}$$

Пусть $\xi_\nu = d\delta q_\nu - \delta dq_\nu$. Для неголономных систем все величины ξ_ν не могут быть нулями.

Из уравнений связей (8) находим

$$\omega_\rho(\xi) + \omega_\rho'(d,\delta) = 0, \quad \rho = 1, 2, \ldots, r, \tag{20}$$

где

$$\omega_\rho(\xi) \equiv \sum_{\nu=1}^{n} A_{\rho\nu}\xi_\nu, \quad \omega_\rho' \equiv \sum_{(\mu,\nu)} \left(\frac{\partial A_{\rho\nu}}{\partial q_\mu} - \frac{\partial A_{\rho\mu}}{\partial q_\nu}\right)[dq_\mu\, dq_\nu]. \tag{21}$$

Точно так же из равенства (10) следует:

$$\omega(\xi) + \omega'(d,\delta) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial W}{\partial q_\nu}\xi_\nu. \tag{22}$$

Но, в силу закона движения (19), второе слагаемое левой части равно нулю. Поэтому

$$\omega(\xi) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial W}{\partial q_\nu}\xi_\nu. \tag{23}$$

Из (20) и (23) следует:

$$\omega(\xi) - \sum_{\rho=1}^{r} M_\rho\, \omega_\rho(\xi) - \sum_{\rho=1}^{r} M_\rho\, \omega_\rho'(d,\delta) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial W}{\partial q_\nu}\xi_\nu, \tag{24}$$

или, в силу (12),

$$-\sum_{\rho=1}^{r} M_\rho\, \omega_\rho'(d,\delta) = 0. \tag{25}$$

Слева здесь билинейная кососимметричная форма. Поэтому, в силу связей (8), должно выполняться равенство

$$\sum_{\rho=1}^{r} M_\rho\, [\omega_\rho' \omega_1 \omega_2 \ldots \omega_r] = 0. \tag{26}$$

Если связи полностью интегрируемы, то, в силу теоремы Фробениуса, равенства (26) тождественно выполняются. Но если связи (8) неголономны, то эти равенства приводят к уравнениям

$$\sum_{\rho=1}^{r} D_{\lambda\rho} M_\rho = 0, \quad \lambda = 1, 2, \ldots, l = \binom{r+2}{n}. \tag{27}$$

Подставив сюда значения M_ρ, найденные из уравнений (12) через производные функции W, получим систему

$$\sum_{\nu=1}^{n} G_{\lambda\nu} \frac{\partial W}{\partial q_\nu} = 0, \quad \lambda = 1, 2, \ldots, l. \tag{28}$$

Кроме того, функция W должна удовлетворять уравнению (17):

$$H\left(q_1, \ldots, q_n, \frac{\partial W}{\partial q_1} + \sum_{\rho=1}^{r} M_\rho A_{\rho 1}, \ldots, \frac{\partial W}{\partial q_n} + \sum_{\rho=1}^{r} M_\rho A_{\rho n}\right) = h. \tag{29}$$

Тем самым доказана следующая теорема:

Теорема. *Условия, необходимые и достаточные для того, чтобы неголономная консервативная система допускала потенциальный метод, состоят в том, чтобы система уравнений в частных производных* (28), (29) *была совместима.*

Рассмотрим три основных этапа выяснения условий совместимости указанных уравнений.

1. Составляя все возможные скобки Пуассона, мы должны получить совместимую систему.

2. Если уравнения (28) сами по себе совместимы, то должно быть:

$$W = \Phi\left(V_1(q_1, \ldots, q_n), V_2(q_1, \ldots, q_n), \ldots, V_k(q_1, \ldots, q_n)\right), \tag{30}$$

где Φ — произвольная функция. Для ее определения сделаем замену переменных

$$V_1 = \eta_1, V_2 = \eta_2, \ldots, V_k = \eta_k, \tag{31}$$

$$q_{k+1} = \zeta_1, \ldots, q_n = \zeta_{n-k}, \tag{32}$$

и после вычисления

$$\frac{\partial W}{\partial q_\nu} = \sum_{\varkappa=1}^{k} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta_\varkappa} \frac{\partial V_\varkappa}{\partial q_\nu}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n, \tag{33}$$

выполним замену в уравнении (29).

3. Результат замены не должен содержать переменных $\zeta_1, \ldots, \zeta_{n-k}$. Если это имеет место, то функция Φ определяется как полный интеграл уравнения

$$K\left(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k, \frac{\partial \Phi}{\partial \eta_1}, \frac{\partial \Phi}{\partial \eta_2}, \ldots, \frac{\partial \Phi}{\partial \eta_k}\right) = h. \tag{34}$$

Определив $\Phi(\eta_1, \ldots \eta_k, h, h_1, \ldots, h_{k-1})$, получим решения уравнений движения

$$\frac{\partial \Phi}{\partial h} = t - t_0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial h_\sigma} = g_\sigma = \text{const}, \quad \sigma = 1, 2, \ldots, k-1. \tag{35}$$

Это будет в общем случае частное решение, зависящее от $2k$ постоянных.

Институт математики и механики
Академии наук Уз.ССР

Поступило
26 VIII 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. А. Чаплыгин, Матем. сборн., **28**, в. 2 (1912). [2] И. С. Аржаных, ДАН, **65**, № 6 (1949). [3] И. С. Аржаных, Тр. Ин-та матем. и мех. АН Уз.ССР, № 6 (1950).