Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXVII, № 1

МАТЕМАТИКА

Ю. Л. ШМУЛЬЯН

ИЗОМЕТРИЧЕСКИЕ ОПЕРАТОРЫ С БЕСКОНЕЧНЫМИ ИНДЕКСАМИ ДЕФЕКТА И ИХ ОРТОГОНАЛЬНЫЕ РАСШИРЕНИЯ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 10 IX 1952)

В настоящей статье обобщается ряд теорем, принадлежащих М. С. Лившицу [1, 2], об изометрических операторах с конечными индексами дефекта и их ортогональных расширениях на случай бесконечных индексов дефекта. Характеристическая матрица-функция [1] в связи с этим заменяется операторной функцией.

1°. T — ограниченный оператор в гильбертовом пространстве H. Подпространство G назовем областью изометричности T, если: 1) $\|Tf\| = \|f\|$ $(f \in G)$; 2) $T(D) \subseteq D'$, где $D = H \ominus G$, $D' = H \ominus G'$ $(G' = T(G))$.

Изометрический оператор V, действующий на G как T, назовем изометрической частью T; оператор τ, действующий на D как T, назовем анизометрической частью T; τ отображает D в D'.

Теорема 1. *T имеет ограниченный обратный тогда и только тогда, когда τ имеет ограниченный обратный.*

Лемма 1. *Если $\bar{\zeta}^{-1}$ — регулярная точка T, то оператор $(T - \zeta I)(I - \zeta T^*)^{-1}$ отображает D в D'.*

Доказательство вытекает из представления

$$(T - \zeta I)(I - \zeta T^*)^{-1} = T - \zeta (I - TT^*)(I - \zeta T^*)^{-1}.$$

Определение. Операторная функция $w(T, \zeta)$, определенная на D равенством

$$w(T, \zeta) f = (T - \zeta I)(I - \zeta T^*)^{-1} f \quad (f \in D) \tag{1}$$

для таких ζ, что $\bar{\zeta}^{-1}$ есть регулярная точка T, называется характеристической функцией оператора T. Область значений оператора $w(T, \zeta)$ при каждом допустимом ζ входит в D'. $w(T, \zeta)$ является регулярной функцией. Она заведомо существует, если $|\zeta| < 1 / \|T\|$.

Пусть V — изометрический оператор с областью задания G, $V(G) = G'$. Оператор T называется ортогональным расширением V [2], если V является изометрической частью T. Ортогональное расширение определяется заданием анизометрической части τ. Ортогональное расширение, для которого $\tau = 0$, назовем минимальным и обозначим через T_0. $\|T_0\| = 1$, если G не есть нулевое подпространство.

Определение. Характеристической функцией оператора V назовем операторную функцию

$$w(\zeta) = -w(T_0, \zeta). \tag{2}$$

Она регулярна при $|\zeta|<1$. При каждом ζ это есть оператор, действующий из D в D', причем $w(0)=0$.

Для $w(\zeta)$ можно получить представление:

$$w(\zeta)f=\zeta P'(I-\zeta T_0^*)^{-1}f \quad (f\in D), \tag{3}$$

где P' — оператор ортогонального проектирования на D'.

Теорема 2. *Если $w(T,\zeta)$ существует, то*

$$w(T,\zeta)=[\tau-w(\zeta)][e-\tau^*w(\zeta)]^{-1}, \tag{4}$$

где e — единичный оператор в D.

Пусть V имеет равные индексы дефекта и, следовательно, допускает унитарные расширения; U — одно из таких расширений. Через $w_D(\zeta)$ обозначим функцию $U^{-1}w(\zeta)$. Это регулярная функция при $|\zeta|<1$, каждое значение которой есть оператор, действующий в D.

Через $v(\zeta)$ обозначаем операторную функцию, определяемую при $|\zeta|<1$ равенством

$$v(\zeta)f=P\frac{U+\zeta I}{U-\zeta I}f \quad (f\in D), \tag{5}$$

где P — оператор ортогонального проектирования на D. При каждом ζ ($|\zeta|<1$) $v(\zeta)$ есть оператор, действующий из D в D.

Справедливы следующие соотношения:

$$w_D(\zeta)=\frac{v(\zeta)-e}{v(\zeta)+e}, \quad v(\zeta)=\frac{e+w_D(\zeta)}{e-w_D(\zeta)}. \tag{6}$$

$v(\zeta)$ имеет неотрицательную вещественную часть, а потому $w_D(\zeta)$ имеет норму $\leqslant 1$. Следовательно, и $w(\zeta)$ имеет норму $\leqslant 1$.

2°. Нижеследующие теоремы устанавливают связь между спектром оператора T и свойствами его характеристической функции.

Теорема 3. *Точка ζ_0 ($|\zeta_0|<1$) тогда и только тогда является регулярной точкой T, когда оператор $w(\zeta_0)-\tau$ имеет ограниченный обратный.*

Теорема 4. *Точка ζ_0 ($|\zeta_0|<1$) тогда и только тогда является собственным числом T, когда оператор $w(\zeta_0)-\tau$ переводит в θ некоторый ненулевой элемент из D.*

Для того, чтобы перейти к случаю $|\zeta|>1$, устанавливаем лемму.

Лемма 2. *Если D_1 и D_2 — два подпространства, A — ограниченный оператор, P_i — оператор ортогонального проектирования на D_i, α — оператор, заданный на D_1 равенством $\alpha f=P_2Af$, то сопряженный оператор задается на D_2 равенством*

$$\alpha^*f=P_1A^*f \quad (f\in D_2).$$

Теорема 3′. *Точка $\overline{\zeta}_0^{-1}$ ($|\zeta_0|<1$) тогда и только тогда будет регулярной точкой T, когда оператор $e-\tau^*w(\zeta_0)$ имеет ограниченный обратный.*

Теорема 4′. *Точка $\overline{\zeta}_0^{-1}$ ($|\zeta_0|<1$) тогда и только тогда является собственным числом T, когда оператор $e-w^*(\zeta_0)\tau$ переводит в θ некоторый ненулевой элемент $\in D$.*

3°. Теорема 5. *Пусть D — унитарное пространство, $u(\zeta)$ — операторная функция комплексного аргумента ζ ($|\zeta|<1$), обладающая свойствами:* 1) $u(\zeta)$ *регулярна при* $|\zeta|<1$; 2) $u(0)=0$; 3) $\|u(\zeta)\|<1$.

Тогда существует пространство $H\supset D$ и в нем изометрический оператор V, заданный на $G=H\ominus D$, такой, что $u(\zeta)=w_D(\zeta)$.

Доказательство. Положив $v(\zeta)=\frac{e+u(\zeta)}{e-u(\zeta)}$ (где e — единичный оператор в D), получим регулярную при $|\zeta|<1$ операторную функцию с неотрицательной вещественной частью, $v(0)=e$. Тогда существует такая эрмитово неубывающая непрерывная слева операторная функция $F(t)$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$, что

$$(v(\zeta)f,f)=\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}+\zeta}{e^{it}-\zeta}\,d(F(t)f,f)\quad (f\in D),$$

при этом $F(0)=0$, $F(2\pi)=e$.

По теореме М. А. Наймарка ([3], [4]) существует пространство $H\supset D$ и в нем спектральная функция E_t такая, что $F(t)f=PE_tf$ $(f\in D)$, где P — оператор ортогонального проектирования на D. Если $U=\int_0^{2\pi}e^{it}dE_t$ — унитарный оператор, то, рассмотрев его только на $G=H\ominus D$, получим искомый изометрический оператор.

Теорема 6. *Два простых* ([1]) *изометрических оператора V и V_1 изоморфны тогда и только тогда, когда соответствующие функции $w_D(\zeta)$ и $w_{1D_1}(\zeta)$ связаны соотношением $w_D(\zeta)=\varphi w_{1D_1}(\zeta)\psi^{-1}$, где φ и ψ — постоянные операторы, отображающие D на D_1 изометрично.*

4°. Точка ζ $(|\zeta|=1)$ называется точкой регулярного типа изометрического оператора V, если существует такое число $k>0$, что для всех $f\in G$ $\|Vf-\zeta f\|\geqslant k\|f\|$. В противном случае ζ называется точкой ядра спектра V.

Из ([5]) вытекает, что изометрический оператор с неравными индексами дефекта не может иметь точек регулярного типа. Поэтому ниже мы считаем, что V имеет равные индексы дефекта.

Нижеследующие теоремы, устанавливающие связь спектра V со свойствами $w_D(\zeta)$ и $w(\zeta)$, в случае конечных индексов дефекта найдены М. С. Лившицем ([2]), но его методы не могут быть перенесены на случай бесконечных индексов дефекта.

Теорема 7. *Если $w_D(\zeta)$ регулярна и унитарна на некоторой дуге единичной окружности, то*: а) *эта дуга состоит из точек регулярного типа оператора V*; б) *для каждой точки ζ_0 этой дуги найдется унитарное расширение V, для которого ζ_0 будет регулярной точкой.*

Для доказательства обратной теоремы устанавливаем леммы:

Лемма 3. *Если ζ_0 — точка регулярного типа оператора V, то ζ_0 является регулярной точкой его минимального расширения T_0.*

Лемма 4. *Если ζ — регулярная точка T_0, то $w(\zeta)$ имеет ограниченный обратный оператор, который определяется равенством*

$$w^{-1}(\zeta)f=-P(T_0-\zeta I)^{-1}f\quad (f\in D'),\tag{7}$$

где P — оператор ортогонального проектирования на D.

Лемма 5. *Если $\bar{\zeta}^{-1}$ — регулярная точка T_0, то $w^*(\zeta)$ выражается равенством*

$$w^*(\zeta)f=\bar{\zeta}P(I-\bar{\zeta}T_0)^{-1}f\quad (f\in D').\tag{8}$$

Теорема 8. *Если ζ_0 — точка регулярного типа оператора V, то $w_D(\zeta)$ регулярна и унитарна на некоторой дуге единичной окружности, содержащей точку ζ_0.*

Доказательство. Регулярность $w_D(\zeta)$ следует из (3) и из леммы 3. Если $|\zeta_0|=1$, т. е. $\zeta_0=\bar{\zeta}_0^{-1}$, то из (7) и (8) вытекает, что

$w_D^{-1}(\zeta_0) = w^{-1}(\zeta_0)\, U = w^*(\zeta_0)\, U = w_D^*(\zeta_0)$, что равносильно унитарности $w_D(\zeta_0)$.

Следствие. Если ζ_0 — точка регулярного типа оператора V, то существует унитарное расширение V, для которого ζ_0 является регулярной точкой.

Житомирский государственный педагогический институт

Поступило 17 XII 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. С. Лившиц, ДАН, **58**, № 1 (1947). [2] М. С. Лившиц, Матем. сборн., **26**, 2 (1950). [3] М. А. Наймарк, Изв. АН СССР, сер. матем., **4**, № 3 (1940). [4] М. А. Наймарк, ДАН, **41**, 373 (1943). [5] М. Г. Крейн, М. А. Красносельский, Усп. матем. наук, **2**, в. 3, 19 (1947).