Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXVII, № 1

МАТЕМАТИКА

Д. МИЛЬМАН

ОБ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 3 IX 1952)

I. Пусть Q обозначает ограниченное и замкнутое множество в вещественном евклидовом n-мерном пространстве E_n и R есть линейное пространство, состоящее из вещественных и непрерывных функций на Q и содержащее константы.

На пространство R мы накладываем единственное ограничение: (α) Если $q_1 \in Q, q_2 \in Q$ и $q_1 \neq q_2$, то имеется такое $x \in R$, что $x(q_1) \neq x(q_2)$.

При этих условиях имеет место теорема:

Теорема 1. *Множество Q содержит некоторое замкнутое подмножество Γ, единственное при заданной совокупности функций R, обладающее такими равносильными свойствами:*

а) Γ *есть минимальное замкнутое подмножество Q, по отношению к которому каждой точке $q_0 \in Q$ отвечает нормированная мера* $\delta(I; q_0)$ так, что имеет место интегральная формула*:

$$x(q_0) = \int_\Gamma x(q)\, d\sigma(I_q; q_0) \quad \text{при всех } x \in R. \tag{1}$$

б) *Точка $q_1 \in Q$ принадлежит множеству* 1 *в том и лишь в том случае, когда каждой окрестности U точки q_1 отвечает функция $x_u \in R$, для которой максимум абсолютной величины в Q не достигается в дополнении $Q - U$.*

Множество Γ я называю T-границей Q**.

Известная теорема об интегральных представлениях значений гармонических функций в области через значения на границе области является частным случаем формулы (1).

Отметим, что одной точке $q_0 \in Q$ отвечает, вообще говоря, много нормированных мер $\sigma(I; q_0)$. Однако оказывается, что все эти меры совпадают (для данной точки q_0) на некоторых специальных множествах.

Ниже мы обрисуем класс этих множеств и укажем способ определения меры $\sigma(I; q_0)$ на них***.

---

* Нормированной мерой на Γ называется неотрицательная функция $\sigma(I)$ множеств $I \subseteq \Gamma$, равная 1 на Γ, вполне аддитивная на наименьшем борелевском теле, содержащем совокупность C всех открытых подмножеств Γ, и удовлетворяющая условию: $\sigma(I) = \operatorname{Inf}_{I \subseteq G \subseteq C} \sigma(G)$ для множеств $I \subseteq \Gamma$.

** В общем случае T-граница введена в статьях ([1,2]); общие теоремы о T-границе даны в статьях ([1-3]).

*** В нижеследующей теореме следует помнить, что R может не быть плотной частью пространства всех непрерывных функций на Γ. В случае, когда R есть плотная часть пространства всех непрерывных функций на Γ, способ определения $\sigma(I; q_0)$ известен.

Обозначим через Γ_x совокупность всех точек T-границы Γ, на которых достигается $\max\limits_{q \in \Gamma} x(q)$ для данной функции $x \in R$. Если Γ_1 есть замкнутое подмножество Γ и Γ_1 является объединением множеств вида Γ_x, то назовем множество Γ_1 δ-замкнутой частью Γ; дополнение $\Gamma - \Gamma_1$ будем называть δ-открытой частью Γ.

Если всякая окрестность δ-замкнутой части Γ_1 T-границы Γ содержит δ-открытую часть G_1, содержащую Γ_1, то назовем дополнение $\Gamma - \Gamma_1$ к множеству Γ_1 нормальной частью Γ. В нижеследующей теореме $S_\varepsilon(I)$ будет обозначать совокупность всех неотрицательных функций $x \in R$, не превосходящих единицу на Γ и меньших положительного числа ε на дополнении $\Gamma - I$ множества I в Γ.

Теорема 2. *Все нормированные меры $\sigma(I; q_0)$, отвечающие точке $q_0 \in Q$ по формуле* (1), *совпадают на нормальных частях T-границы* Γ. *Если I есть нормальная часть, то имеет место формула:*

$$\sigma(I; q_0) = \lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{x \in S_\varepsilon(I)} x(q_0). \tag{2}$$

Из этой теоремы вытекает:

Следствие. *Если каждое замкнутое подмножество* Γ *является δ-замкнутой частью* Γ, *то каждой точке $q_0 \in Q$ отвечает единственная нормированная мера $\sigma(I; q_0)$, определяемая формулой* (2).

II. Здесь мы вкратце опишем метод получения изложенных выше результатов. Значение $x(q_0)$ функций $x \in R$ в точке $q_0 \in Q$ есть линейный функционал $f_{q_0}(x) = x(q_0)$ в R, неотрицательный на неотрицательных функциях из R и равный единице на функции $e(q)$, тождественно равной единице на Q; такие функционалы (не только значения в точке) мы называем R-средними на Q.

Совокупность $K_{(Q)}$ всех R-средних на Q есть выпуклое множество, содержащее Q. В $K_{(Q)}$ вводится топология окрестностями точек $f_0 \in K_{(Q)}$ вида $|f(x_j) - f_0(x_j)| < \varepsilon_j$, $x_j \in R$, $1 \leqslant j \leqslant n$; здесь $f \in K_{(Q)}$. В этой топологии $K_{(Q)}$ оказывается выпуклым бикомпактом; топология Q в бикомпакте $K_{(Q)}$ остается прежней.

Оказывается, множеством Γ теоремы 1 служит замыкание множества экстремальных точек $K_{(Q)}$; теорема 1 предыдущего пункта является, таким образом, следствием общих теорем статьи ([1]).

Если Q есть абстрактное множество и R — линейное пространство вещественных и ограниченных функций на Q, содержащее все константы, то одно лишь условие (α) достаточно для введения топологии в Q указанным выше способом и включения Q в выпуклый бикомпакт $K_{(Q)}$; замыкание Q^0 множества Q есть бикомпактное расширение Q. В этих общих условиях для Q^0 верна не только теорема 1 (что видно из статьи ([1])), но и теорема 2.

Одесский электротехнический
институт связи

Поступило
20 VI 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Д. Мильман, ДАН, 57, № 2, 119 (1947). [2] Д. Мильман, ДАН, 59, № 6, 1045 (1948). [3] Д. Мильман, ДАН, 83, № 3, 357 (1952).