Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXVII, № 1

МАТЕМАТИКА

И. М. ГЛАЗМАН

О ХАРАКТЕРЕ СПЕКТРА ОДНОМЕРНЫХ СИНГУЛЯРНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 10 IX 1952)

Настоящая заметка посвящена исследованию расположения непрерывной части спектра краевой задачи, связанной с дифференциальной операцией $2n$-го порядка

$$l[y] = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} p_k(x) \frac{d^{n-k} y}{dx^{n-k}} \quad (0 < x < \infty) \tag{1}$$

с одним сингулярным концом. Применение предлагаемого здесь метода к хорошо изученной операции

$$-y'' + q(x)\, y \tag{2}$$

дает, наряду с критериями, полученными ранее различными частными приемами, также и новые результаты.

В заметке принята следующая классификация точек спектра самосопряженных операторов A в гильбертовом пространстве H. Спектр $\mathbf{S}(A)$ оператора A состоит из двух непересекающихся частей $\mathbf{S}(A) = \mathbf{D}(A) + \mathbf{C}(A)$. Дискретная часть $\mathbf{D}(A)$ состоит из всех изолированных точек роста спектральной функции E_λ оператора A (за исключением собственных значений бесконечной кратности*). Непрерывная часть $\mathbf{C}(A)$ состоит из всех неизолированных точек роста функции E_λ (и изолированных точек роста, являющихся собственными значениями бесконечной кратности).

В основу исследования положена следующая простая лемма:

Лемма. *Для выполнения соотношения* $\mathbf{C}(A) \cap [\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon] \neq 0$ *необходимо и достаточно существование бесконечномерного линейного многообразия G, на котором имеет место неравенство*

$$\| Af - \lambda f \| < \varepsilon \| f \| \quad (f \in G). \tag{3}$$

Для бесконечности множества $\mathbf{S}(A) \cap (-\infty, \lambda)$ *необходимо и достаточно существование бесконечномерного линейного многообразия G, на котором имеет место неравенство*

$$(Af - \lambda f, f) < 0 \quad (f \in G). \tag{4}$$

* В случае операции (1) таких собственных значений не существует.

Следствие. *Если* $\lambda \in \mathbf{C}(A)$ *и* Q — *ограниченный самосопряженный оператор с нормой* $\|Q\| \leqslant \eta$, *то* $\mathbf{C}(A+Q) \cap [\lambda - \eta, \lambda + \eta] \neq 0$ (см. [1]).

Переходя к операции (1), условимся обозначать порождаемый ею минимальный незамкнутый оператор через L' (в [1] этот оператор обозначен через L), его замыкание — через L и любое самосопряженное расширение — через $\widetilde{L}$. Так как дефектное число def L конечно, то множество $\mathbf{C}(\widetilde{L})$ не зависит от выбора $\widetilde{L}$. Если расщепить L' в точке $x=\gamma$, то получим $L_0' = L_0' \oplus L_\gamma'$ и, соответственно, $\widetilde{L}_0 = \widetilde{L}_1 \oplus \widetilde{L}_\gamma$, причем $\mathbf{C}(\widetilde{L}) - \mathbf{C}(\widetilde{L}_0) = \mathbf{C}(\widetilde{L}_\gamma)$ (см. [1]).

Применение леммы состоит в построении многообразия G, на котором выполнено (3) или (4). В качестве первого примера применения леммы покажем, что изменение коэффициента $p_n(x)$ на величину, бесконечно малую при $x \to \infty$, не влияет на $\mathbf{C}(\widetilde{L})$.

Теорема А. *Если* $l[y]$ *и* $\mu[y]$ — *две операции типа* (1) *и*

$$\mu[y] = l[y] + \eta(x) y,$$

где $\lim \eta(x) = 0$ *при* $x \to \infty$, *то* $\mathbf{C}(\widetilde{L}) = \mathbf{C}(\widetilde{M})$.

Доказательство. Пусть E_λ — спектральная функция оператора $\widetilde{L}$ и пусть $\lambda \in \mathbf{C}(\widetilde{L})$. Требуется доказать, что $\lambda \in \mathbf{C}(\widetilde{M})$. Зададимся числом $\varepsilon > 0$ и выберем произвольно несколько линейно независимых функций из бесконечномерного линейного многообразия $E(\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon) H$ (здесь $H = \mathscr{L}_2(0, \infty)$). Так как def $L < \infty$, то при достаточно большом числе выбранных функций можно из них образовать линейную комбинацию $f_1 (\neq 0)$, принадлежащую D_L; при этом будет $\| L f_1 - \lambda f_1 \| < \varepsilon \| f_1 \|$. Так как, далее, L есть замыкание L', то существует функция $\varphi_1 \in D_{L'}$ такая, что $\| L \varphi_1 - \lambda \varphi_1 \| < \varepsilon \| \varphi_1 \|$; при этом существенно, что функция $\varphi_1(x)$ финитна (т. е. равна нулю вне конечного интервала). Теперь расщепим L в любой точке $x = \gamma$, правее которой $\varphi(x) = 0$. Так как $\mathbf{C}(\widetilde{L}) = \mathbf{C}(L_\gamma)$, то $\lambda \in \mathbf{C}(\widetilde{L}_\gamma)$, и можно построить при $x > \gamma$ функцию $\varphi_2 \in D_{L_\gamma}$, такую, что $\| L_\gamma \varphi_2 - \lambda \varphi_2 \| < \varepsilon \| \varphi_2 \|$, или, что то же, $\| L \varphi_2 - \lambda \varphi_2 \| < \varepsilon \| \varphi_2 \|$.

Продолжая неограниченно начатый процесс, придем к бесконечной последовательности $\mathfrak{S}$ функций $\{\varphi_k\}_1^\infty$, обладающей следующими свойствами:

а) функции $\varphi_k(x) \equiv \varphi_k(x; \lambda, \varepsilon)$ финитны и принадлежат $D_{\widetilde{L}}$;

б) если $[\alpha_s, \beta_s]$ означает наименьший интервал, вне которого $\varphi_s(x) = 0$, то $[\alpha_k, \beta_k] \cap [\alpha_r, \beta_r] = 0$ $(k \neq r)$;

в) $\| \widetilde{L} \varphi_k - \lambda \varphi_k \| < \varepsilon \| \varphi_k \|$.

Образуем линейную оболочку G_m последовательности $\{\varphi_k\}_{k=m}^\infty$. Из а), б), в) следует, что при $\varphi \in G_m$ будет $\| \widetilde{L} \varphi - \lambda \varphi \| < \varepsilon \| \varphi \|$. Отсюда при заданном $\eta > 0$ и достаточно большом m, в силу условия $\eta(x) \to 0$, будет $\| \widetilde{M} \varphi - \lambda \varphi \| < (\varepsilon + \eta) \| \varphi \|$, но тогда из леммы заключаем, что $\mathbf{C}(\widetilde{M}) \cap [\lambda - (\varepsilon + \eta), \lambda + (\varepsilon + \eta)] \neq 0$, откуда, в силу произвольности $\varepsilon > 0$, следует $\mathbf{C}(\widetilde{M}) \cap (\lambda - \eta, \lambda + \eta) \neq 0$, а так как число $\eta > 0$ также произвольно, то $\lambda \in \mathbf{C}(\widetilde{M})$, ч. т. д.

Если заменить условие $\eta(x) \to 0$ условием $\limsup\limits_{x \to \infty} |\eta(x)| < \eta$, то, видоизменяя лишь окончание приведенных выше рассуждений, получим, что $\mathbf{C}(\widetilde{M})$ лежит в η-окрестности $\mathbf{C}(\widetilde{L})$.

В случае операции (2) вопрос о справедливости теоремы А был поставлен в [4], где доказано лишь совпадение крайних левых точек $\mathbf{C}(\widetilde{L})$ и $\mathbf{C}(\widetilde{M})$. Если в (2) положить $q(x) \equiv 0$, то доказанная теорема дает результаты ([6]) и ([7]) (см. ([1])), которые можно усилить следующим образом.

Условимся здесь и далее обозначать штрихом множества точек полуоси $(0, \infty)$, содержащие интервалы любой длины. Если принять в условии теоремы А $l[y] = (-1)^n y^{(2n)}$, то при доказательстве можно положить

$$\varphi_k(x;\ \lambda,\ \varepsilon) = \varphi_1(x - \alpha_k;\ \lambda,\ \varepsilon), \tag{5}$$

откуда следует следующая теорема.

Теорема 1. *Если* $\lim q(x) = 0$ *при* $x \to \infty$, $x \in I'$, *то спектр* $\mathbf{S}(\tilde{L})$ *оператора, порожденного операцией* $l[y] = (-1)^n y^{(2n)} + q(x) y$, *содержит полуось* $\lambda > 0$. *Если* $\omega(q) = \lim\sup q(x) - \lim\inf q(x) < \infty$ *при* $x \to \infty$, $x \in I'$, *то при любом* $\lambda > 0$ *будет* $\mathbf{C}(\tilde{L}) \cap [\lambda, \lambda + \omega] \neq 0$.

Приводимые ниже теоремы устанавливаются по образцу теоремы А на основе сравнения операции (1) с операцией $(-1)^n y^{(2n)}$ и специального выбора системы функций $\mathfrak{S}$, обладающей свойствами а), б), в).

Теорема 2. *Если выполнены предельные соотношения*

$$\lim p_0(x) = 1;\quad \lim p_k(x) = 0; \tag{6}$$

$$\lim p_k^{(r)}(x) = 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots, n;\ r = 1, 2, \ldots, k-1) \tag{7}$$

при $x \to \infty$, *то* $[0, \infty] \subset \mathbf{S}(\tilde{L})$.

Доказательство проводится с помощью системы (5). Теорема остается справедливой, если считать в (6) и (7) $x \in I'_{k,r}$. Если правые части (6) заменить на $c_0 > 0$ и c_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$, то при некотором N будет $(N, \infty) \subset \mathbf{S}(\tilde{L})$.

Теорема 3. *Если выполнено* (6), (7) *и, кроме того,*

$$\lim_{x \to \infty} p_k(x) = +0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1), \tag{8}$$

то $(-\infty, 0) \cap \mathbf{C}(\tilde{L}) = 0$.

Доказательство. Для любого $\eta > 0$ найдется γ такое, что при $x > \gamma$ будет $p_n(x) > -\eta$, и, следовательно, $L_\gamma > -\eta E$, так что $(-\infty, -\eta) \cap \mathbf{C}(\tilde{L}_\gamma) = 0$. С другой стороны, $\mathbf{C}(\tilde{L}) = \mathbf{C}(\tilde{L}_\gamma)$, и поэтому $(-\infty, -\eta) \cap \mathbf{C}(\tilde{L}) = 0$. Так как число $\eta > 0$ произвольно, то $(-\infty, 0) \cap \cap \mathbf{C}(\tilde{L}) = 0$, ч. т. д.

Теорема 4. *Если выполнено* (6), (7), (8) *и, кроме того,*

$$\lim p_n(x) = -0, \quad \lim x^{2n-1} \int_x^\infty |p_n(t)|\, dt = \infty$$

при $x \to \infty$, *то отрицательные собственные значения оператора* $\tilde{L}$ *имеют предельную точку* $\lambda = 0$.

Доказательство основано на полуограниченности снизу оператора $\tilde{L}$ и на системе $\mathfrak{S}$, аналогичной использованной в ([1]) для теоремы 3.

Теорему 4 можно несколько усилить. Так например, при $n = 1$, $p_0(x) \equiv 1$ имеет место:

Теорема 4а. *Если в* (2) $\lim\limits_{x \to \infty} q(x) = -0$ *и* $x_k \int\limits_{x_k}^\infty |q(t)|\, dt > 1$ *для некоторой последовательности* $x_k \to \infty$, *то точка* $\lambda = 0$ *является предельной точкой отрицательных собственных значений.*

Эту теорему можно рассматривать также как достаточный критерий осцилляционности уравнения $l[y] = 0$.

Доказательство дальнейших теорем опирается на систему функций $\mathfrak{S}$, где $\varphi_1(x; \lambda, \varepsilon) = \sqrt{\varepsilon}\varphi_0(\varepsilon x)\exp(i\sqrt[2n]{\lambda}x)$, $\varphi_k(x) = \varphi_1(x - \alpha_k)$, причем $\varphi_0(x)$ — некоторая фиксированная функция из $D_{L'}$.

Представим теперь операцию (1) в виде

$$l[y] = \sum_{k=0}^{2n} q_k(x) \frac{d^{2n-k} y}{dx^{2n-k}}$$

и предположим, для простоты, $q_0(x) \equiv (-1)^n$.

Теорема 5. *Если коэффициенты $q_k(x)$ $(k = 2, 3, \ldots, n;\ x \in I'_k)$ ограничены, то при больших λ $C(\tilde{L}) \cap [\lambda, \lambda + \rho(\lambda)] \neq 0$, где $\rho(\lambda) = \omega(q_2)\lambda^{\frac{n-1}{n}}$ (величины $\omega_k = \omega(q_k)$ определены, как в условии теоремы* 1).

Если $\omega_2 = \omega_3 = \ldots = \omega_{r-1} = 0$, $\omega_r \neq 0$, то $\rho(\lambda) = \omega_r \lambda^{1-\frac{r}{2n}}$. Из теоремы 5, в частности, следует, что $\tilde{C}(L) \cap (N, \infty) \neq 0$ при любом N.

Теорема 6. *Пусть $\mathbf{M}_{k,\eta}$ означает множество всех точек x, для которых $|q_k(x)| > \eta$. Если при каждом $\eta > 0$ будет $\int\limits_{\mathbf{M}_{k,\eta}} |q_k(x)|^2 dx < \infty$, то $[0, \infty) \subset \mathbf{S}(\tilde{L})$.*

В условии этой теоремы также можно считать $x \in I'_k$.

Из теоремы 6 можно вывести ряд более простых достаточных критериев выполнения соотношения $[0, \infty) \subset \mathbf{S}(\tilde{L})$. Таковым, например, является каждое из следующих условий: 1) функции $q_k(x)$ ограничены и при $x \to \infty$ стремятся к нулю по мере; 2) при некоторых положительных σ_k существуют интегралы $\int^{\infty} |q_k(x)|^{\sigma_k} dx$ (при дополнительном предположении об ограниченности функции $q_r(x)$, при $\sigma_r < 2$).

Последний критерий может быть усилен за счет освобождения от требования ограниченности $q_r(x)$ при $\sigma_r \geqslant 1$. Для этого следует видоизменить систему функций $\mathfrak{S}$, положив $\varphi_k(x; \lambda, \varepsilon) = \sqrt{\varepsilon}\,\varphi_0[\varepsilon(x - \alpha_k)]\, e_k(x; \lambda)$, где $e_k(x; \lambda)$ — некоторое решение уравнения $l[y] - \lambda y = 0$*.

Для случая (2) теорема 6 и последующие рассуждения дают, в частности, критерий Путнема ($q(x) \in \mathcal{L}_2(0, \infty)$ [7]), Уолеча ($\sqrt{x}q(x) \in \mathcal{L}_2(0, \infty)$ [5]), а также критерий Вейля ($q(x) \in \mathcal{L}_1(0, \infty)$ [2]) в несколько усиленной форме, так как при интегрировании полуось $(0, \infty)$ можно заменить множеством I'. Условия 1) и 2) являются, повидимому, новыми для операции (2), за исключением случаев интегрируемости со степенью 1 или 2.

Изменяя несколько условие теоремы 6, можно получить критерии, аналогичные сформулированным в теореме 5. Отметим также, что в случае (2) все критерии, констатирующие наличие непрерывной части спектра, являются одновременно достаточными условиями для соотношения $\operatorname{def} L = 1$ (случай предельной точки см. [2])**. Изложенный способ исследования распространяется на многомерный случай.

Харьковский политехнический институт им. В. И. Ленина

Поступило 10 IX 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. М. Глазман, ДАН, 80, 153 (1951). [2] Б. М. Левитан, Разложение по собственным функциям..., 1950. [3] М. А. Наймарк, ДАН, 82, 517 (1952). [4] Ph. Hartman, C. R. Putnam, Am. J. Math., 70, 849 (1948). [5] S. Wallach, ibid., 70, 833 (1948). [6] Ph. Hartman, ibid., 71, 71 (1949). [7] C. R. Putnam, ibid., 71, 109 (1949).

* Эту систему функций предложил В. А. Марченко.

** Ряд критериев для определения $\operatorname{def} L$ в общем случае (1) недавно получен М. А. Наймарком [3].