Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXVI, № 3

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

К. В. СОЛЯНИК-КРАССА

К РЕШЕНИЮ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 23 VII 1952)

Уравнение статики в перемещениях при осесимметричном загружении тел вращения [1]

$$(\lambda+2\mu)\frac{\partial\vartheta}{\partial r}+2\mu\frac{\partial\omega}{\partial z}=0,\quad (\lambda+2\mu)\frac{\partial\vartheta}{\partial z}-2\mu\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\omega)=0 \tag{1}$$

выполняются, если положить

$$\vartheta=\frac{1}{\lambda+2\mu}\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi_*}{\partial r},\quad \omega=\frac{1}{2\mu}\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi_*}{\partial z}, \tag{2}$$

где φ_* — функция, удовлетворяющая дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2\varphi_*}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi_*}{\partial r}+\frac{\partial^2\varphi_*}{\partial z^2}=0. \tag{3}$$

В формулах, приведенных выше, r и z — цилиндрические координаты точек тела (ось z совпадает с осью вращения); λ и μ — постоянные Ламе; $\vartheta=\frac{1}{r}\frac{\partial(ru)}{\partial r}+\frac{\partial w}{\partial z}$, $2\omega=\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial r}$, соответственно, относительная объемная деформация и вращение; u и w — радиальное и осевое смещения.

Вводя новую вспомогательную функцию Φ условием

$$\frac{\lambda}{r}\frac{\partial(ru)}{\partial r}+(\lambda+2\mu)\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r},\quad \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial r}\right)=\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial z}, \tag{4}$$

для перемещений получаем:

$$u=\frac{1}{2\mu}\frac{\Phi+\varphi_*}{r},\quad \frac{\partial w}{\partial r}=\frac{1}{2\mu}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial z}(\Phi-\varphi_*),\quad \frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{1}{2\mu}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\Phi+\frac{\nu}{1-\nu}\varphi_*\right), \tag{5}$$

где ν — отношение Пуассона.

На основании первого равенства функция Φ должна удовлетворять уравнению

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)^2\Phi=0. \tag{6}$$

По условиям интегрируемости двух последних уравнений (5) устанавливается связь между функциями Φ и φ_*

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=\frac{1}{1-\nu}\frac{\partial^2\varphi_*}{\partial z^2}. \tag{7}$$

Задавая функцию Φ в виде

$$\Phi = \psi + z\frac{\partial\varphi}{\partial z}, \tag{8}$$

где ψ — функция, удовлетворяющая уравнению $\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = 0$ и $\varphi = \frac{1}{2(1-\nu)}\varphi_*$, выполним условие (7) и для напряжений получим

$$\begin{gathered}\sigma_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r} - \Omega, \quad \sigma_z = -\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}, \\ \sigma_\varphi = 2(1+\nu)\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \Omega, \quad \tau_{rz} = \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial z},\end{gathered} \tag{9}$$

Здесь для простоты записи принято обозначение

$$\Omega = \frac{1}{r^2}[\Phi + 2(1-\nu)\varphi] - \frac{2}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}.$$

По отсутствию сдвигов и радиальных перемещений на оси вращения на основании второго равенства (4) и первого равенства (5) функции Φ и φ должны удовлетворять условиям

$$\frac{1}{r}\Phi = 0, \quad \frac{1}{r}\varphi = 0 \quad \text{при } r = 0. \tag{10}$$

На контуре осевого сечения тела вращения напряжения связаны с радиальной p_r и осевой p_z составляющими внешней нагрузки равенствами

$$\sigma_r\cos(nr) + \tau_{rz}\cos(nz) = p_r, \quad \tau_{rz}\cos(nr) + \sigma_z\cos(nz) = p_z, \tag{11}$$

в силу которых

$$\frac{d\Phi}{ds} = rp_z, \quad \Omega\cos(nr) = \frac{1}{r}\frac{d\Phi}{dn} - p_r \tag{12}$$

на контуре в осевом сечении тела; ds и dn — соответственно, элементы дуги и нормали.

В частном случае отсутствия нагрузки на поверхности тела

$$\Phi = C = \text{const}, \quad \Omega\cos(nr) = \frac{1}{r}\frac{d\Phi}{dn} \tag{13}$$

на контуре в осевом сечении тела*.

Таким образом, задача отыскания напряжений при осесимметричном загружении тел вращения сводится к построению функций напряжений φ и Φ, удовлетворяющих дифференциальным уравнениям (3) и (6) и условиям (10) и (12) или (13) и связанных между собой условием (7).

В случаях осесимметричного загружения удлиненных вдоль оси тел вращения (стержней) обычно требуется точное удовлетворение граничных условий на боковой поверхности и выполнение условий статической эквивалентности напряжений внешним, приложенным в торцах силам. При отсутствии нагрузки на боковой поверхности тела последние условия сводятся к равенству $C = -P/2\pi$, где P — сила, растягивающая стержень.

---

* В приложениях иногда удобно, чтобы функция Φ была равна нулю на контуре в осевом сечении тела и имела постоянное значение $\Phi = C$ на оси вращения. Условия (10) при этом получают форму $\frac{1}{r}(\Phi - C) = 0$ и $\frac{1}{r}[\Phi + 2(1-\nu)\varphi] = 0$ при $r = 0$.

В криволинейных ортогональных изотермических координатах ξ и η (^{2}) уравнение (3) получает вид

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\right)+\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\right)=0. \qquad (14)$$

Напряжения в таких координатах определяются формулами

$$\sigma_\xi=\frac{1}{H}\left[\frac{1}{r}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi}\frac{\partial r}{\partial \xi}-\frac{\partial \Phi}{\partial \eta}\frac{\partial r}{\partial \eta}\right)-\Omega\left(\frac{\partial r}{\partial \xi}\right)^2\right],$$

$$\sigma_\eta=\frac{1}{H}\left[\frac{1}{r}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \eta}\frac{\partial r}{\partial \eta}-\frac{\partial \Phi}{\partial \xi}\frac{\partial r}{\partial \xi}\right)-\Omega\left(\frac{\partial r}{\partial \eta}\right)^2\right],$$

$$\sigma_\varphi=\frac{2(1+\nu)}{rH}\left[\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\frac{\partial r}{\partial \xi}+\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\frac{\partial r}{\partial \eta}\right]+\Omega, \qquad (15)$$

$$\tau_{\xi\eta}=\frac{1}{H}\left[\frac{1}{r}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi}\frac{\partial r}{\partial \eta}+\frac{\partial \Phi}{\partial \eta}\frac{\partial r}{\partial \xi}\right)-\Omega\frac{\partial r}{\partial \xi}\frac{\partial r}{\partial \eta}\right],$$

где $H=\left(\frac{\partial r}{\partial \xi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)^2=\left(\frac{\partial r}{\partial \eta}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)^2$.

В частном случае эллиптических координат

$$r=c\,\mathrm{sh}\,\xi\sin\eta,\quad z=c\,\mathrm{ch}\,\xi\cos\eta \qquad (16)$$

функции φ и Φ имеют значения

$$\varphi_0=(A_0^0\,\mathrm{ch}\,\xi+B_0^0)(C_0^0\cos\eta+D_0^0),$$

$$\varphi_k=[A_k^0P_k'(x)+B_k^0Q_k'(x)][C_k^0P_k'(y)+D_k^0Q_k'(y)]\,\mathrm{sh}^2\xi\sin^2\eta,$$

$$\Phi_0=(A_0^*\,\mathrm{ch}\,\xi+B_0^*)(C_0^*\cos\eta+D_0^*)+ \qquad (17)$$

$$+\frac{\mathrm{ch}\,\xi\cos\eta}{\mathrm{ch}^2\xi-\cos^2\eta}[A_0^0(C_0^0\cos\eta+D_0^0)\,\mathrm{sh}^2\xi\cos\eta+C_0^0(A_0^0\,\mathrm{ch}\,\xi+B_0^0)\,\mathrm{ch}\,\xi\sin^2\eta],$$

$$\Phi_k=[A_k^*P_k'(x)+B_k^*Q_k'(x)][C_k^*P_k'(y)+D_k^*Q_k'(y)]\,\mathrm{sh}^2\xi\sin^2\eta+$$

$$+\frac{\mathrm{sh}^2\xi\,\mathrm{ch}\,\xi\sin^2\eta\cos\eta}{\mathrm{ch}^2\xi-\cos^2\eta}\{[A_k^0P_k''(x)+B_k^0Q_k''(x)][C_k^0P_k'(y)+D_k^0Q_k'(y)]\,\mathrm{sh}^2\xi\cos\eta+$$

$$+[A_k^0P_k'(x)+B_k^0Q_k'(x)][C_k^0P_k''(y)+D_k^0Q_k''(y)]\,\mathrm{ch}\,\xi\sin^2\eta\},$$

где $P_k(x)$, $Q_k(x)$, $P_k(y)$, $Q_k(y)$ — функции Лежандра первого и второго рода переменных $x=\mathrm{ch}\,\xi$ и $y=\cos\eta$.

Функции

$$\varphi=c^2[A_1^0+B_1^0Q_1'(x)]\,\mathrm{sh}^2\xi\sin^2\eta+c^3\{A_2^0\,\mathrm{ch}\,\xi+A_1^0c^2[3\,\mathrm{sh}^2\xi-$$

$$-(7\,\mathrm{ch}^2\xi-3)\cos^2\eta]\,\mathrm{ch}\,\xi+B_2^0Q_2'(x)+B_4^0Q_4'(x)(7\cos^2\eta-3)\}\,\mathrm{sh}^2\xi\sin^2\eta\cos\eta, \qquad (18)$$

$$\Phi=c^2\left[A_1^*+B_1^*Q_1'(x)-2B_1^0\frac{b^2-\cos^2\eta}{\mathrm{ch}^2\xi-\cos^2\eta\,\mathrm{sh}^2\xi}\frac{\mathrm{ch}\,\xi}{\mathrm{sh}^2\xi}\right]\mathrm{sh}^2\xi\sin^2\eta+$$

$$+c^3\{(A_2^*+A_2^0)\,\mathrm{ch}\,\xi+c^2[3(A_4^*+A_4^0)\,\mathrm{sh}^2\xi-(A_4^*+A_4^*)(7\,\mathrm{ch}^2\xi-3)\cos^2\eta-$$

$$-8A_4^0\,\mathrm{ch}^2\xi\cos^2\eta]\,\mathrm{ch}\,\xi+(B_2^*+B_2^0)Q_2'(x)+(B_4^*+B_4^0)Q_4'(x)(7\cos^2\eta-3)+$$

$$+4B_4^0\left[5Q_2'(x)+2Q_4'(x)-\frac{5}{2}\right]\cos^2\eta-$$

$$-2\frac{B_2^0+4B_4^0}{\mathrm{sh}_2\,\xi}\frac{b^2-\cos^2\eta}{\mathrm{ch}^2\xi-\cos^2\eta}\Big\}\sin^2\xi\sin^2\eta\cos\eta,$$

взятые из числа (17), соответствуют решению задачи о концентрации напряжений у весьма малой эллиптической полости, образованной вращением эллипса $x = b$, в круглой плите с высотой $2h$ и радиусом a, нагруженной равномерной нагрузкой q по верхней грани при боковой поверхности, свободной от радиальных сил и распределенных моментов.

Значения постоянных в функциях (18) суть следующие:

$$A_1^* = \frac{1}{4} q; \quad A_2^* = \frac{3}{8} \frac{q}{h} - A_2^0; \quad A_4^* = -\frac{1}{64} \frac{q}{h^3};$$

$$A_1^0 = -\frac{q}{8(1+\nu)}; \quad A_2^0 = -\frac{1}{2(1+\nu)} \frac{3q}{160h}\left[12 - 4\nu + 5(3+\nu)\frac{a^2}{h^2}\right]; \quad A_4^0 = \frac{1}{64}\frac{q}{h^3};$$

$$B_1^* = -\frac{1}{Q_1'(b)}\left(A_1^* - \frac{2bB_1^0}{b^2-1}\right); \quad B_1^0 = \frac{1}{D}\left[A_1^* - (1+\nu)\, b\, (b^2-1) A_1^0 Q_1'(b)\right];$$

$$B_2^* + B_2^0 = \frac{1}{Q_2'(b)}\left[-\frac{3}{8}\frac{qb}{h} + 3(B_4^* + B_4^0) Q_4'(b) + \frac{2\left(B_2^0 + 4B_4^0\right)}{b^2-1}\right];$$

$$B_4^* + B_4^0 = \frac{1}{7Q_4'(b)}\left\{8c^2b^3A_4^0 - 4B_4^0\left[5Q_2'(b) + 2Q_4'(b) - \frac{5}{2}\right]\right\};$$

$$B_4^0 = \frac{c^2b^2}{D_1}\left\{2A_4^0(b^2-1)\left[9 - 2\frac{bQ_4''(b)}{Q_4'(b)}\right] + (1+\nu)A_4^0(7b^2-3)\right\};$$

$$\begin{gathered}
B_2^0 = \frac{b^2-1}{2D_2}\left\{-\frac{3}{8}\frac{q}{h}(b^2-1)\left(1 - \frac{bQ_2''(b)}{Q_2'(b)}\right) - 2(1+\nu)b^2A_2^0 + 6(3+\nu)b^2(b^2-1)A_4^0 + \right. \\
+ 3(b^2-1)(B_4^* + B_4^0)\left[Q_4''(b) - \frac{Q_2''(b)}{Q_2'(b)}Q_4'(b)\right] + \frac{12B_4^0}{b^2-1}\left[b - 4\frac{Q_2(b)}{Q_2'(b)}\right] + \\
\left. + 14B_4^0\, b\,(b^2-1)\left[5Q_2'(b) - \frac{5}{2}\right] + 6(1+\nu)B_4^0 bQ_4'(b)\right\};
\end{gathered} \tag{19}$$

$$D = \frac{2b}{b^2-1} + \left[1 + 3b^2 + (1+\nu)\,b\,(b^2-1)\,Q_1'(b)\right] Q_1'(b);$$

$$\begin{gathered}
D_1 = 2(b^2-1)\left[5Q_2''(b) + 2Q_4''(b)\right] + 7b(b^2-1)\left[5Q_2'(b) - \frac{5}{2} + \frac{2}{(b^2-1)^2}\right] + \\
+ 7(1+\nu)\,bQ_4'(b) - 2\frac{(b^2-1)\,Q_4''(b)}{Q_4'(b)}\left[5Q_2'(b) + 2Q_4'(b) - \frac{5}{2}\right];
\end{gathered}$$

$$D_2 = (1+\nu)\,b\,(b^2-1)\,Q_2'(b) + 6\frac{Q_2(b)}{Q_2'(b)} + 2b.$$

Случаи:

$$A_1^* = -\frac{1}{2}p; \quad A_1^0 = \frac{1}{4(1+\nu)}p; \quad A_2^* = A_2^0 = A_4^* = A_4^0 = 0; \tag{20}$$

$$A_1^0 = \frac{1}{2(1+\nu)}p; \quad A_1^* = A_2^* = A_2^0 = A_4^* = A_4^0 = 0; \tag{21}$$

$$A_2^* = -\frac{1}{2(1+\nu)}\frac{p}{h}; \quad A_2^0 = \frac{1}{2(1+\nu)}\frac{p}{h}; \quad A_1^* = A_1^0 = A_4^* = A_4^0 = 0 \tag{22}$$

соответствуют концентрации напряжений у указываемой полости при растяжении стержня силой $P = \pi a^2 p$ (20), при сжатии плиты радиальной нагрузкой p, приложенной к боковой поверхности (21), и при чистом изгибе плиты (22).

Поступило
19 VII 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Ляв, Математическая теория упругости, 1935. [2] Л. С. Лейбензон, Курс теории упругости, 1947.