

Н. А. СЛЕЗКИН

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ГЕЛЬМГОЛЬЦА О РАЗЛОЖЕНИИ  
ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЦЫ

(Представлено академиком А. И. Некрасовым 5 VII 1952)

Теорема Гельмгольца о разложении движения частицы сплошной среды с постоянной массой является естественным развитием тех теорем о конечных перемещениях абсолютно твердого тела, которые рассматриваются в теоретической механике. Если проследить в кинематике переход от менее сложного движения тела к более сложному, то можно обнаружить, что этот переход сопровождается постепенным увеличением числа тех точек тела, на перемещениях которых необходимо сосредоточить внимание для определения кинематических характеристик движения всего тела. Если для изучения поступательного движения тела достаточно зафиксировать внимание на перемещении одной лишь точки тела, то для определения кинематических характеристик произвольного движения неизменяемого тела  $\bar{V}_0$  и  $\bar{\omega}$  необходимо фиксировать внимание на перемещениях уже трех точек тела, не лежащих на одной прямой. В теореме же Гельмгольца мы имеем дело с дальнейшим увеличением числа точек, элементарные перемещения которых необходимо задать для определения кинематических характеристик движения частицы деформируемой сплошной среды. При таком подходе к теореме Гельмгольца можно все рассуждения по доказательству этой теоремы распространить и на движение дискретной системы материальных точек.

Допустим, что мы имеем систему дискретно расположенных материальных точек. В момент  $t$  зафиксируем внимание на четырех материальных точках, расположенных на прямых, параллельных осям координат:

$$O(x_0, y_0, z_0); A(x_A, y_0, z_0); B(x_0, y_B, z_0); C(x_0, y_0, z_C). \quad (1)$$

Зафиксируем положения этих же точек и в момент  $t + \Delta t$ :

$$O_1(x_{0_1}, y_{0_1}, z_{0_1}); A_1(x_{A_1}, y_{A_1}, z_{A_1}); B_1(x_{B_1}, y_{B_1}, z_{B_1}); C_1(x_{C_1}, y_{C_1}, z_{C_1}). \quad (2)$$

По четырем векторам элементарных перемещений  $\overline{OO_1}$ ,  $\overline{AA_1}$ ,  $\overline{BB_1}$  и  $\overline{CC_1}$  определим четыре вектора скоростей фиксированных материальных точек.

При помощи векторов скоростей и соответственных расстояний между фиксированными точками в момент  $t$  можно определить:

1) вектор угловой скорости, полагая

$$\begin{aligned} 2\omega_x &= \frac{V_{Bz} - V_{0z}}{y_B - y_0} - \frac{V_{Cy} - V_{0y}}{z_C - z_0}; \\ 2\omega_y &= \frac{V_{Cx} - V_{0x}}{z_C - z_0} - \frac{V_{Az} - V_{0z}}{x_A - x_0}; \\ 2\omega_z &= \frac{V_{Ay} - V_{0y}}{x_A - x_0} - \frac{V_{Bx} - V_{0x}}{y_B - y_0}, \end{aligned} \quad (3)$$

и 2) тензор скоростей деформаций, если положить

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{V_{Ax} - V_{0x}}{x_A - x_0}; \quad \epsilon_{yy} = \frac{V_{By} - V_{0y}}{y_B - y_0}; \quad \epsilon_{zz} = \frac{V_{Cz} - V_{0z}}{z_C - z_0}; \\ \epsilon_{xy} &= \frac{V_{Ay} - V_{0y}}{x_A - x_0} + \frac{V_{Bx} - V_{0x}}{y_B - y_0}; \\ \epsilon_{yz} &= \frac{V_{Bz} - V_{0z}}{y_B - y_0} + \frac{V_{Cy} - V_{0y}}{z_C - z_0}; \\ \epsilon_{zx} &= \frac{V_{Cx} - V_{0x}}{z_C - z_0} + \frac{V_{Az} - V_{0z}}{x_A - x_0}. \end{aligned} \quad (4)$$

Теорема Гельмгольца будет теперь формулироваться лишь по отношению движения тетраэдрной клетки. Прямоугольную тетраэдрную клетку  $OABC$  можно преобразовать в косоугольную тетраэдрную клетку  $O_1A_1B_1C_1$ : 1) поступательно-переносным перемещением, при котором вершина  $O$  совмещается с вершиной  $O_1$ ; 2) переносно-вращательным перемещением вокруг оси, проходящей через  $O_1$ , с угловой скоростью, проекции вектора которой представлены равенствами (3), и 3) совокупностью деформаций, скорости отдельных видов которых представлены формулами (4).

При помощи перечисленных трех перемещений мы можем действительно воспроизвести новые положения в момент  $t + \Delta t$  четырех фиксированных точек, составляющих вершины косоугольного тетраэдра. Но при помощи только этих перемещений, вообще говоря, нельзя воспроизвести весь состав материальных точек, расположенных в момент  $t + \Delta t$  в объеме клетки  $O_1A_1B_1C_1$ . Чтобы проверить, в какой мере указанными тремя перемещениями воспроизводится действительный состав материальных точек в объеме клетки  $O_1A_1B_1C_1$ , необходимо сопоставить действительные перемещения всех точек, расположенных в момент  $t$  внутри  $OABC$ , а в момент  $t + \Delta t$  внутри  $O_1A_1B_1C_1$ , за рассматриваемый промежуток времени  $\Delta t$  с теми перемещениями, которые имели бы все эти точки, если бы они вместе с ранее рассмотренными четырьмя точками составляли частицу сплошной среды. Разность действительного перемещения какой-либо материальной точки, расположенной в момент  $t$  внутри тетраэдра  $OABC$  или по соседству с ним, и переносного перемещения этой точки вместе с частицей сплошной среды, кинематические характеристики движения которой определяются по перемещениям четырех фиксированных точек, можно назвать относительным перемещением этой точки по отношению к частице.

Таким образом, мы приходим к следующему результату: совокупность материальных точек, заполняющих в момент  $t$  прямоугольный тетраэдр  $OABC$ , можно переместить в совокупность тех же материальных точек, но расположенных в момент  $t + \Delta t$  как внутри тетраэдра  $O_1A_1B_1C_1$ , так и по соседству с ним, следующими последовательными перемещениями: 1) поступательно-переносным, 2) вращательно-переносным, 3) совокупностью деформаций и 4) совокупностью относительных перемещений всех отдельных точек, причем вектор элементарного относительного перемещения каждой отдельной точки определяется как разность вектора действительного перемещения этой точки и вектора переносного перемещения, составленного из перечисленных первых трех перемещений.

Вследствие наличия относительных движений отдельных материальных точек в указанном выше смысле этого слова состав этих точек в объеме косоугольного тетраэдра  $O_1A_1B_1C_1$  не будет, вообще говоря, совпадать с составом материальных точек в объеме прямоугольного тетраэдра  $OABC$ . В этом именно смысле мы можем считать массу той совокупности точек, фиксирование которой в момент  $t$  производится при помощи фиксирования лишь четырех точек этой совокупности, переменной. Однако следует заметить, что переменность массы, обнаруживаемая сравнением состава материальных точек в объеме  $O_1A_1B_1C_1$  с составом таких же точек в объеме  $OABC$ , вызывается не всей совокупностью относительных перемещений отдельных точек в этих объемах, а только той частью совокупности относительных перемещений, которая приводит либо к входу в объем  $O_1A_1B_1C_1$  тех точек, которые в момент  $t$  располагались вне объема  $OABC$ , либо к выходу из объема  $O_1A_1B_1C_1$  точек, ранее принадлежавших объему  $OABC$ . Это обстоятельство позволяет всю совокупность материальных точек в объемах  $OABC$  и  $O_1A_1B_1C_1$  разделить на две группы. В основную группу — группу постоянного состава — следует отнести все те материальные точки, которые были внутри  $OABC$  в момент  $t$  и остались внутри  $O_1A_1B_1C_1$  в момент  $t + \Delta t$ . В группу же переменного состава следует отнести все остальные точки этих двух тетраэдров, т. е. те точки, которые за рассматриваемый промежуток времени  $\Delta t$  либо присоединяются к постоянному составу точек, либо, наоборот, от него отсоединяются.

Рассмотрим теперь жидкость или газ в движении. Зафиксируем внимание на четырех геометрических точках  $O$ ,  $A$ ,  $B$  и  $C$ . Проведем мысленно вокруг каждой из этих точек сферы осреднения. По положениям миллиардов молекул и их массам в каждой сфере осреднения установим положение центра масс всех этих молекул в каждой сфере. Пусть эти центры масс совпадают с указанными геометрическими точками. Фиксируем положения всех молекул в каждой сфере осреднения в следующий момент времени  $t + \Delta t$  и снова определяем положения центров масс молекул, ранее расположенных в той или иной сфере осреднения. Соединяя эти центры масс соответственными отрезками, мы получим четыре вектора скоростей  $\vec{V}_O$ ,  $\vec{V}_A$ ,  $\vec{V}_B$  и  $\vec{V}_C$ .

Таким образом, при помощи указанной операции осреднения мы от реальной жидкости переходим к дискретной системе материальных точек. Если называть макроскопической частицей жидкости совокупность молекул в тетраэдре  $OABC$ , длины ребер которого превышают диаметр сфер осреднения, то массу такой частицы следует, вообще говоря, считать переменной в указанном выше смысле. К массе молекул в тетраэдре  $OABC$  за промежуток времени  $\Delta t$  могут присоединиться другие молекулы, или наоборот. Разумеется, что во многих реальных случаях движения жидкости этими дополнительными потоками молекул, вызывающими изменение массы фиксированной частицы, можно пренебрегать. Но пример турбулентных движений жидкости

показывает, что в некоторых случаях этими дополнительными потоками молекул пренебрегать нельзя.

При использовании указанной выше операции осреднения можно ввести в рассмотрение вектор-функцию

$$\bar{V} = \bar{V}(x; y; z; t), \quad (5)$$

обладающую в некоторых пределах свойствами непрерывной функции от своих аргументов. Определяя векторы скоростей в трех точках  $A$ ,  $B$  и  $C$  при помощи разложения (5) и сохраняя слагаемые со вторыми производными, получим из (3) и (4), например,

$$\begin{aligned} 2\omega_x &= \frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} + \frac{1}{2}(y_B - y_0) \frac{\partial^2 V_z}{\partial y^2} - \frac{1}{2}(z_C - z_0) \frac{\partial^2 V_y}{\partial z^2}; \\ \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{1}{2}(x_A - x_0) \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2}; \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x} + \frac{1}{2}(x_A - x_0) \frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \frac{1}{2}(y_B - y_0) \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2}. \end{aligned} \quad (6)$$

Для того чтобы можно было кинематические характеристики переносного движения частицы определять через первые производные от (5), необходимо наложить ограничения на длины ребер тетраэдра фиксированной частицы в зависимости от соотношения порядков первых и вторых производных по координатам от (5). Например, для прямолинейного движения это требование будет приводить к следующему неравенству для поперечного размера частицы:

$$|y_B - y_0| \ll 2 \frac{|\partial V_x / \partial y|}{|\partial^2 V_x / \partial y^2|}. \quad (7)$$

Выражение в правой части этого неравенства используется в полуэмпирических теориях турбулентности.

Приведенные выше положения могут служить дополнительными доказательствами возможности введения в рассмотрение деформируемой среды частиц с переменными массами, дифференциальные уравнения движения которой даны в наших работах (<sup>1</sup>, <sup>2</sup>).

Московский государственный университет  
им. М. В. Ломоносова

Поступило  
29 VI 1952

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

<sup>1</sup> Н. А. Слезкин, ДАН, 79, № 1 (1951). <sup>2</sup> Н. А. Слезкин, Вестн. Московск. ун-та, № 10 (1951).