Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXVI, № 3

МАТЕМАТИКА

А. Г. ПОСТНИКОВ

К ВОПРОСУ О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ДРОБНЫХ ДОЛЕЙ ПОКАЗАТЕЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 23 VII 1952)

Пусть $q \geqslant 2$ целое, α вещественное. Через Δ будем обозначать интервалы на [01], через $|\Delta|$ — их длины. И. И. Шапиро-Пятецкий [1] доказал, что если α такое, что есть постоянная C, что для любого интервала Δ

$$\overline{\lim_{P\to\infty}} \frac{N_P(\Delta)}{P} < C|\Delta|, \tag{1}$$

где через $N_P(\Delta)$ обозначено число дробных долей $\{\alpha q^x\}$, $x=1, 2, \ldots, P$, попавших на Δ, то тогда $\{\alpha q^x\}$ равномерно распределено. В настоящей работе показывается, что методом, посредством которого И. М. Виноградов оценил тригонометрическую сумму с многочленом, можно получить теорему, усиливающую теорему Шапиро-Пятецкого.

Теорема. *Пусть $N_P(\Delta)$ обозначает число дробных долей $\{\alpha q^x\}$, $x=1, 2, \ldots, P$, попавших на интервал Δ. Пусть α такое, что есть $C>0$, $k>0$, что для любого интервала*

$$\overline{\lim_{P\to\infty}} \frac{N_P(\Delta)}{P} < C|\Delta|\left(1+\log\frac{1}{|\Delta|}\right)^k. \tag{2}$$

Тогда $\{\alpha q^x\}$ равномерно распределено.

Доказательство проводится аналогично тому, как И. М. Виноградов оценил полиномиальную тригонометрическую сумму [2], но только здесь часть, соответствующая подсчету числа решений диофантовых уравнений, почти очевидна.

Обозначим:

$$S=\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i m\alpha q^x}.$$

Согласно критерию Вейля, достаточно показать, что при $P\to\infty$ $S=o(P)$. Возьмем некоторую величину $l<P$ и пусть $y=0, 1, \ldots, l-1$. Тогда

$$S=\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i m\alpha q^{x+y}} + 2\theta l, \quad |\theta|<1. \tag{3}$$

Складывая эти равенства при $y=0, 1, \ldots, l-1$ и разделив на l, имеем

$$S=\frac{1}{l}\sum_{y=0}^{l-1}\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i m\alpha q^{x+y}} + 2\theta' l. \tag{4}$$

Отсюда (через K_1, K_2, ... обозначаем постоянные, зависящие, быть может, лишь от q, k, m и в дальнейшем от d)

$$|S| \leqslant K_1 \left(\frac{1}{l} \sum_{x=1}^{P} \left| \sum_{y=0}^{l-1} e^{2\pi i m q^y \{\alpha q^x\}} \right| + l \right). \tag{5}$$

Пусть $d = [k] + 1$:

$$|S|^{2d} \leqslant K_2 \left(\frac{P^{2d-1}}{l^{2d}} \sum_{x=1}^{P} \left| \sum_{y=0}^{l-1} e^{2\pi i m q^y \{\alpha q^x\}} \right|^{2d} + l^{2d} \right). \tag{6}$$

Возьмем целое r и разделим отрезок [01] на части длины $\Delta_1, \ldots, \Delta_r$. Пусть $\{\alpha q^x\}$ попало на $\Delta_{j(x)}$. Пусть β — произвольная точка $\Delta_{j(x)}$.

$$\left| \sum_{y=0}^{l-1} e^{2\pi i m q^y \beta} - \sum_{y=0}^{l-1} e^{2\pi i m q^y \{\alpha q^x\}} \right| \leqslant \sum_{y=0}^{l-1} \left| e^{2\pi i m q^y \beta} - e^{2\pi i m q^y \{\alpha q^x\}} \right| \leqslant$$

$$\leqslant 2\pi m \left| \{\alpha q^x\} - \beta \right| \sum_{y=0}^{l-1} q^y \leqslant K_3 \frac{q^l}{r}. \tag{7}$$

Отсюда

$$\left| \sum_{y=0}^{l-1} e^{2\pi i m q^y \{\alpha q^x\}} \right| \leqslant \left| \sum_{y=0}^{l-1} e^{2\pi i m q^y \beta} \right| + \frac{K_3 q^l}{r}. \tag{8}$$

Возводя (8) в степень $2d$, интегрируя по β по $\Delta_{j(x)}$ и умножая на r, имеем:

$$\left| \sum_{y=0}^{l-1} e^{2\pi i m q^y \{\alpha q^x\}} \right|^{2d} \leqslant K_4 \left(r \int_{\Delta_{j(x)}} \left| \sum_{y=0}^{l-1} e^{2\pi i m q^y \beta} \right|^{2d} d\beta + \frac{q^{2dl}}{r^{2d}} \right). \tag{9}$$

Отсюда

$$|S|^{2d} \leqslant K_5 \left(\frac{P^{2d-1} r}{l^{2d}} \sum_{x=1}^{P} \int_{\Delta_{j(x)}} \left| \sum_{y=0}^{l-1} e^{2\pi i m q^y \beta} \right|^{2d} d\beta + \frac{P^{2d} q^{2dl}}{r^{2d}} + l^{2d} \right), \tag{10}$$

или, распространяя интегрирование на весь отрезок [01], получим:

$$|S|^{2d} \leqslant K_5 \left(\frac{P^{2d-1} r}{l^{2d}} \max_{1 \leqslant j \leqslant r} N_P(\Delta_j) \int_0^1 \left| \sum_{y=0}^{l-1} e^{2\pi i m q^y \beta} \right|^{2d} d\beta + \frac{P^{2d} q^{2dl}}{r^{2d}} + l^{2d} \right). \tag{11}$$

$I = \int_0^1 \left| \sum_{y=0}^{l-1} e^{2\pi i m q^y \beta} \right|^{2d} d\beta$ равен числу решений уравнения

$$q^{y_1} + \ldots + q^{y_d} = q^{y'_1} + \ldots + q^{y'_d} \tag{12}$$

в числах $0 \leqslant y_1, \ldots, y'_d \leqslant l - 1$.

Докажем, что число решений этого уравнения меньше или равно $K_6 l^d$. Мы можем $y_1, \ldots, y_d$ придавать значения от 0 до $l-1$. Получим самое большое l^d различных чисел L. Покажем, что каждое такое число можно не более чем $K_6(d) = K_6$ способами представить в виде $q^{y_1'} + \ldots + q^{y_d'}$. Число таких представлений не более чем $d!$, умноженный на число представлений числа L в виде $\lambda_1 q^{z_1} + \lambda_2 q^{z_2} + \ldots$, где $z_1 > z_2 > \ldots$, $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots = d$.

1) Если $d \leqslant q-1$, то представление L в виде $\lambda_1 q^{z_1} + \lambda_2 q^{z_2} + \ldots$ есть единственное q-ичное представление числа L, и утверждение справедливо.

2) $d > q-1$. Именно, пусть $q^s(q-1) < d \leqslant q^{s+1}(q-1)$. s зависит исключительно от d, но не от l. Пусть $q^f - q < L \leqslant q^{f+1} - q$. За z_1 можем взять только числа из ряда $f, f-1, \ldots, f-1-s$. Если мы возьмем z_1 меньше, то

$$L = \lambda_1 q^{z_1} + \lambda_2 q^{z_2} + \ldots \leqslant d\,(q^{z_1} + q^{z_1+1} + \ldots) \leqslant$$

$$\leqslant q^{s+1}(q-1)\frac{q^{z_1+1}-1}{q-1} \leqslant q^{s+1}(q^{f-1-s}-1) =$$

$$= q^f - q^{s+1} \leqslant q^f - q < L \text{ (строго!).}$$

Это противоречие. Таким образом, для z_1 возможно не более $s+2$ значений. Каждому значению z_1 возможно сопоставить не более d значений λ_1. Рассмотрим $L - \lambda_1 q^{z_1}$. Повторяя рассуждение, получим, что ему будет соответствовать не более $s+2$ значений z_2; поэтому число систем $\lambda_2 q^{z_2}$ будет меньше $d(s+2)$, и т. д. Итак, число представлений L в виде $\lambda_1 q^{z_1} + \lambda_2 q^{z_2} + \ldots$ будет меньше или равно $d^d(s+2)^d = K_7(d)$. Таким образом, число решений системы (12) будет меньше или равно $K_6(d)\,l^d = K_6 l^d$.

Отсюда:

$$\left|\frac{1}{P}\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i m\alpha q^x}\right|^{2d} \leqslant K_8\left(\frac{r}{l^d}\,\frac{\max\limits_{1\leqslant j\leqslant r} N_P(\Delta_j)}{P} + \frac{q^{2dl}}{r^{2d}} + \frac{l^{2d}}{P^{2d}}\right). \tag{13}$$

Возьмем $l = \left[\frac{\varepsilon_1}{\log q}\log r\right] < \frac{\varepsilon_1}{\log q}\log r$, $0 < \varepsilon_1 < 1$;

$$\left|\frac{1}{P}\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i m\alpha q^x}\right|^{2d} \leqslant K_9\left(\frac{r}{\log^d r}\,\frac{\max\limits_{1\leqslant j\leqslant r} N_P(\Delta_j)}{P} + \frac{1}{r^{2d(1-\varepsilon_1)}} + \frac{\log^{2d} r}{P^{2d}}\right) \tag{14}$$

или

$$\left|\frac{1}{P}\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i m\alpha q^x}\right| \leqslant K_{10}\left(\frac{r^{1/2d}}{\sqrt{\log r}}\left(\frac{\max\limits_{1\leqslant j\leqslant r} N_P(\Delta_j)}{P}\right)^{1/2d} + \frac{1}{r^{1-\varepsilon_1}} + \frac{\log r}{P}\right). \tag{15}$$

Выберем η сколь угодно малым, но фиксированным. При $r \geqslant r_1$ $\frac{K_{10}}{r^{1-\varepsilon_1}} < \frac{\eta}{2}$; $K_{10}\frac{2C(1+\log r)^{K/2([K]+1)}}{\sqrt{\log r}} < \frac{\eta}{2}$. Возьмем такое r и разделим отрезок [01] на r частей. При $P \geqslant P_0(r)$, по условию теоремы,

$\frac{\max\limits_{1\leqslant j\leqslant r} N_P(\Delta_j)}{P} < 2C\frac{1}{r}(1+\log r)^k$. Подставляя и устремляя $P\to\infty$, получим:

$$\overline{\lim}\left|\frac{1}{P}\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i m\alpha q^x}\right| \leqslant \eta.$$

Но η сколь угодно мало. Это доказывает теорему.

Замечание 1. Из своей теоремы Шапиро-Пятецкий вывел следствие, что если αq^x равномерно распределено, то и αq^{lx} равномерно распределено, где l натуральное. Этот факт можно получить другим путем из общей теоремы теории равномерного распределения, как это сделано в работе (3).

Замечание 2. Метод доказательства теоремы может быть без труда обобщен на многомерный случай. Например, можно легко доказать, что если через $N_P(\Delta)$ обозначено количество точек $(\{\alpha q^x\}, \{\alpha x q^x\})$, $x=1, 2, \ldots, P$, попавших на какой-то квадрат Δ с площадью $|\Delta|$ (лежащий в единичном квадрате), и α такое, что для каждого такого квадрата Δ выполняется неравенство:

$$\overline{\lim_{P\to\infty}}\frac{N_P(\Delta)}{P} < C|\Delta|\left(1+\log\frac{1}{|\Delta|}\right)^{1-\varepsilon}, \tag{16}$$

то точки $(\{\alpha q^x\}, \{\alpha x q^x\})$ равномерно распределены.

Математический институт
им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
23 VII 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. И. Шапиро-Пятецкий, Изв. АН СССР, сер. матем., 15 (№ 1) 47 (1951). [2] И. М. Виноградов, Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 23, 64 (1947). [3] Н. М. Коробов, А. Г. Постников, ДАН, 84, № 2 (1952).