Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXVI, № 3

МАТЕМАТИКА

Н. И. ПОЛЬСКИЙ

НЕКОТОРЫЕ ОБОБЩЕНИЯ МЕТОДА Б. Г. ГАЛЕРКИНА

(Представлено академиком М. В. Келдышем 22 VII 1952)

Ниже излагаются результаты исследования сходимости некоторых обобщений метода Галеркина, в основе которых лежит обобщение, предложенное Г. И. Петровым [1] для исследования устойчивости движения вязкой жидкости.

1°. Пусть в комплексном пространстве Банаха E, обладающем базисом, заданы два базиса, т. е. такие две последовательности $\{\psi_i\}$ и $\{\varphi_i\}$, что для каждого $x \in E$ однозначно будет:

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \Psi_i(x)\,\psi_i = \sum_{i=1}^{\infty} \Phi_i(x)\,\varphi_i, \tag{1}$$

где $\Psi_i(x)$ и $\Phi_i(x)$ — линейные функционалы из $\bar{E}$ и $\Psi_i(\psi_j) = \delta_{ij}$; $\Phi_i(\varphi_j) = \delta_{ij}$.

Рассмотрим теперь в пространстве E уравнение

$$x = A(\lambda)\,x + f, \tag{2}$$

где $A(\lambda)$ — вполне непрерывный оператор при каждом λ из некоторой области D комплексной плоскости и аналитически по норме зависит от λ в D, $f \in E$. Мы будем считать в этом пункте, что λ не является собственным значением оператора $A(\lambda)$, т. е. уравнение $x - A(\lambda)\,x = 0$ не имеет нетривиальных решений. Уравнение (2) имеет в этом случае единственное решение $x \in E$.

Упомянутое обобщение метода Галеркина состоит в отыскании приближенного решения x_n уравнения (2) в виде

$$x_n = \sum_{i=1}^{n} c_i^{(n)}\,\psi_i, \tag{3}$$

причем $c_i^{(n)}$ определяются из условий

$$\Phi_i(x_n - A(\lambda)\,x_n - f) = 0 \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{4}$$

В случае, когда базисы $\{\psi_i\}$ и $\{\varphi_i\}$ совпадают, получаем обычный метод Галеркина, сходимость которого изучена в [2]*.

Через L_n будем обозначать n-мерное подпространство пространства E, которое порождается первыми n элементами базиса $\{\psi_i\}$. Через P_n будем обозначать проекционный оператор, определяемый соотношением

* Результаты работы [2] частично изложены также в обзорной статье С. Г. Михлина [3], §§ 21, 22.

$$P_n x = \sum_{i=1}^{n} \Phi_i(x)\,\varphi_i.$$

Теперь обобщенный метод Галеркина состоит в отыскании приближенного решения $x_n \in L_n$ из условия

$$P_n x_n - P_n A(\lambda)\, x_n = P_n f.$$

Оказывается, что при произвольных базисах $\{\psi_i\}$ и $\{\varphi_i\}$ последовательность приближенных решений, вообще говоря, может не сходиться.

Для того чтобы имела место сходимость указанного метода, наложим на базисы $\{\psi_i\}$ и $\{\varphi_i\}$ условие (А), которое ниже всюду будем считать выполненным.

Условие (А). Существует такое положительное число C, что для всех n, начиная с некоторого,

$$\|x\| \leqslant C \|P_n x\|,$$

где x — произвольный элемент из L_n.

Теорема 1. *Если λ не является собственным значением оператора $A(\lambda)$ и базисы $\{\psi_i\}$, $\{\varphi_i\}$ удовлетворяют условию (А), то, начиная с некоторого n, приближенные решения x_n определяются однозначно, и последовательность их сильно сходится к точному решению x уравнения* (1), *т. е.* $\|x_n - x\| \to 0$, *если* $n \to \infty$.

2°. Определения. 1) λ_n, при которых уравнение $(P_n - P_n A(\lambda_n))x_n = 0$ имеет хотя бы одно нетривиальное решение $x_n \in L_n$, будем называть приближенными собственными значениями оператора $A(\lambda)$.

2) Соответствующие нетривиальные решения $x_n \in L_n$ будем называть собственными векторами, принадлежащими значению λ_n.

3) Приближенным инвариантным подпространством, принадлежащим значению λ_n, будем называть совокупность векторов $x_n \in L_n$, для которых при некотором натуральном k одновременно $(P_n - P_n A(\lambda_n))^k x_n = 0$.

Теорема 2. *Все собственные значения оператора $A(\lambda)$, и только они, могут быть получены как пределы всевозможных последовательностей приближенных собственных значений.*

Теорема 3. *Из всякой последовательности $\{f_n\}$ приближенных собственных векторов, принадлежащих собственным значениям $\lambda_n \to \lambda_0$, можно выбрать хотя бы одну сильно сходящуюся подпоследовательность, причем сильным пределом такой подпоследовательности будет собственный вектор f оператора $A(\lambda)$, принадлежащий собственному значению λ_0.*

Замечание. Как было показано нами ([2]), даже в том случае, когда базисы $\{\psi_i\}$ и $\{\varphi_i\}$ совпадают, вообще говоря, не всякий собственный вектор оператора $A(\lambda)$ может быть получен как предел линейных комбинаций приближенных собственных векторов. Это тем более относится к случаю, когда базисы $\{\psi_i\}$ и $\{\varphi_i\}$ различны. Однако имеет место следующая теорема:

Теорема 4. *Все векторы инвариантного подпространства оператора $A(\lambda)$, принадлежащего собственному значению λ_0, и только они, могут быть получены как пределы всевозможных линейных комбинаций векторов из приближенных инвариантных подпространств, принадлежащих приближенным собственным значениям $\lambda_n \to \lambda_0$.*

Теоремы 1—4 справедливы, если выполняется условие (А). Можно показать, что условие (А) в некотором смысле необходимо для того, чтобы эти теоремы имели место. Именно, если условие (A) не выполнено, можно построить уравнение типа (2), для которого обобщенный метод Галеркина не приводит к сходящемуся процессу.

3°. Изложенный выше метод можно применить к изучению сходимости метода моментов Н. М. Крылова и метода наименьших квадратов. Для этого ограничимся случаем, когда E является гильбертовым пространством H. В этом пространстве условия (4) для отыскания $c_i^{(n)}$ примут вид

$$(x_n - A(\lambda)\, x_n - f,\ \varphi_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Метод моментов состоит в отыскании приближенного решения (3) уравнения (2) из условий

$$(x_n - A(\lambda)\, x_n - f,\ L\psi_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{5}$$

где L — некоторый оператор.

Из предыдущих рассуждений следует, что для сходимости метода моментов достаточно (и в некотором смысле необходимо), чтобы последовательность $\{L\psi_i\}$ образовывала базис в H и чтобы базисы $\{\psi_i\}$ и $\{L\psi_i\}$ удовлетворяли условию (A).

Можно показать, что это имеет место, например, в том случае, когда $L = I - B(\mu)$, где I — единичный, а $B(\mu)$ — вполне непрерывный оператор, зависящий аналитически по норме от μ в некоторой области комплексной плоскости и μ не является собственным значением оператора $B(\mu)$.

В частности, когда $B(\mu) = A(\lambda)$, система (5) принимает вид

$$(x_n - A(\lambda)\, x_n - f,\ \psi_i - A(\lambda)\, \psi_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{6}$$

Предыдущие результаты применим теперь к исследованию сходимости метода наименьших квадратов для уравнения (2). Этот метод состоит, как известно, в отыскании приближенного решения (3) из условия

$$\| x_n - A(\lambda)\, x_n - f \|^2 = \min,$$

т. е. $c_i^{(n)}$ отыскиваются из условий

$$\frac{\partial}{\partial c_i^{(n)}} \| x_n - A(\lambda)\, x_n - f \|^2 = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

а эта система, как легко видеть, в точности совпадает с системой (6).

Таким образом, если только оператор $A(\lambda)$ удовлетворяет условиям предыдущих теорем, то метод наименьших квадратов приводит к сходящемуся процессу.

4°. Опять-таки ограничиваясь гильбертовым пространством H, отметим, что результаты предыдущих пунктов можно легко перенести на уравнения вида

$$Ax - B(\lambda)\, x = f, \tag{7}$$

где A — положительно-определенный самосопряженный (т. е. $A = A^*$, $\overline{\mathfrak{D}(A)} = H$) оператор, оператор $(A - B(\lambda))^{-1}$ существует и определен на всем H. Кроме того, $A^{-1} B(\lambda)$ вполне непрерывен и аналитически по норме зависит от λ в пространстве H_0, которое строится путем пополнения $\mathfrak{D}(A)$ по скалярному произведению $[f, g] = (Af, g)$.

Пусть теперь $\{\psi_i\}$ и $\{\varphi_i\}$ — два базиса в H_0, удовлетворяющие условию (А). Тогда рассматриваемый метод состоит в отыскании приближенного решения (3) уравнения (7) из условий

$$[x_n - A^{-1}B(\lambda)\,x_n - A^{-1}f,\ \varphi_i] = 0 \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

или, что то же самое, из условий

$$(Ax_n - B(\lambda)\,x_n - f,\ \varphi_i) = 0 \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{8}$$

Теперь ясно, что предыдущие результаты автоматически распространяются на этот случай. Последовательности $\{\psi_i\}$ и $\{\varphi_i\}$ должны лишь быть базисами пространства H_0 и удовлетворять условию (А) в смысле нормы этого пространства.

Отметим, что при $\varphi_i = M\psi_i$ условия (8) принимают вид

$$(Ax_n - B(\lambda)\,x_n - f,\ M\psi_i) = 0 \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

что соответствует методу моментов Н. М. Крылова для уравнений вида (7). Приведенные выше условия достаточны (и в некотором смысле необходимы) для сходимости этого метода в применении к уравнениям типа (7).

В частности, метод приводит к сходящемуся процессу, когда $M = A - B(\lambda)$. Приближенные уравнения (8) принимают вид

$$(Ax_n - B(\lambda)\,x_n - f,\ A\psi_i - B(\lambda)\,\psi_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

а эта система уравнений, очевидно, представляет собой приближенную систему для решения уравнения (7) по методу наименьших квадратов.

Таким образом, метод наименьших квадратов для уравнений типа (7) сходящийся.

Житомирский педагогический институт
им. Франко

Поступило
24 VI 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. И. Петров, Журн. прикл. матем. и мех., 4 (3) (1940). [2] Н. И. Польський, Докл. АН УРСР, № 6 (1949). [3] С. Г. Михлин, Усп. матем. наук, 5, в. 6 (40) (1950).