

В. А. ЗМОРОВИЧ

О СТРУКТУРНЫХ ФОРМУЛАХ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ
АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ, ОДНОЛИСТНЫХ
В КРУГОВОМ КОЛЬЦЕ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 4 VIII 1952)

1. Условимся обозначать через $K_z(r; R)$ и $K_z[r; R]$, где $0 < r < R$, круговые кольца, определяемые неравенствами

$$r < |z| < R, \quad r \leq |z| \leq R, \quad (1)$$

соответственно. Назовем C -функциями в круговом кольце $K_z(r; R)$ такие регулярные аналитические в этом кольце функции $f(z)$, которые обладают в нем положительной вещественной частью. Будем называть C -функцию нормированной в кольце $K_z(r; R)$, если она удовлетворяет условию

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\rho} \frac{f(z)}{z} dz = 1 \quad (r < \rho < R). \quad (2)$$

Условимся также называть функцией класса M на сегменте $[-\pi; \pi]$ всякую неубывающую на этом сегменте функцию $\mu(\theta)$, нормированную условиями

$$\mu(-\pi + 0) = \mu(-\pi) = 0, \quad \mu(\pi) = 2\pi. \quad (3)$$

Наконец, введем в рассмотрение функцию

$$F(z) = \frac{i}{\pi} Z_1\left(\frac{1}{2\pi i} \ln z; q\right), \quad (4)$$

где $Z_1(\zeta; q) = \frac{d}{d\zeta} \vartheta_1(\zeta; q)$, $0 < q < 1$, а $\vartheta_1(\zeta; q)$ — эллиптическая тэта-функция с периодами 1 и τ ($q = e^{i\pi\tau}$).

Функция $\vartheta_1(\zeta; q)$ определяется разложением

$$\vartheta_1(\zeta; q) = 2 \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} q^{\frac{1}{4}(2k-1)^2} \sin(2k-1)\pi\zeta \quad (5)$$

и обладает следующими свойствами: $\vartheta_1(\zeta+1; q) = -\vartheta_1(\zeta; q)$; $\vartheta_1(\zeta+\tau; q) = -h\vartheta_1(\zeta; q)$, где $h = q^{-1}e^{-2\pi i\zeta}$.

Функция $Z_1(\zeta; q)$ может быть представлена в круговом кольце $K_z(q; 1)$ разложением вида

$$Z_1(\zeta; q) = \pi \operatorname{ctg} \pi\zeta + 4\pi \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{q^{2k}}{1 - q^{2k}} \sin 2\pi k\zeta, \quad \text{где } \zeta = \frac{1}{2\pi i} \ln z, \quad (6)$$

а потому функция $f(z)$ (4) может быть представлена в этом же кольце так:

$$F(z) = \frac{1+z}{1-z} + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{q^{2k}}{1-q^{2k}} (z^k - z^{-k}) \quad (q < |z| < 1). \quad (7)$$

Теорема 1. Необходимым и достаточным условием для того, чтобы функция $f(z)$ была нормированной S -функцией в круговом кольце $K_z(q; 1)$, является представимость ее в этом кольце формулой

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(ze^{-i\theta}) d\mu_1(\theta) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F\left(\frac{q}{z} e^{i\theta}\right) d\mu_2(\theta) - 1, \quad (8)$$

где $\mu_1(\theta)$ и $\mu_2(\theta)$ — функции класса M на сегменте $[-\pi, \pi]$, а интегралы берутся в смысле Стильтьеса.

Чтобы убедиться в достаточности представления (8), следует заметить, что функция $w = F(z)$ осуществляет однолистное конформное отображение кольца $K_z(q; 1)$ на полуплоскость $\operatorname{Re} w > 0$ с разрезом вдоль некоторого прямолинейного отрезка. Поэтому имеют место следующие равенства:

$$[\min \operatorname{Re} F(z)]_{|z|=r} = F(-r), \quad \left[\min \operatorname{Re} F\left(\frac{q}{z}\right) \right]_{|z|=r} = F\left(-\frac{q}{r}\right). \quad (9)$$

Из формулы (8) на основании равенства (9) следует

$$\operatorname{Re} f(re^{i\theta}) \geq F(-r) + F\left(-\frac{q}{r}\right) - 1 = \lambda(r).$$

Можно установить, что $\lambda(r) > 0$ ($q < r < 1$). Для доказательства необходимости представления (8) вводим в рассмотрение последовательность колец $K_z(q/\rho_n; \rho_n)$ ($n = 1, 2, \dots$), где $0 < \rho_n < 1$, $q < \rho_n^2$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \rho_n = 1$ и каждому из этих колец сопоставляем две функции $\varphi_n(\theta)$ и $\psi_n(\theta)$:

$$\varphi_n(\theta) = \int_{-\pi}^{\theta} u(\rho_n; \vartheta) d\vartheta, \quad \psi_n(\theta) = \int_{-\pi}^{\theta} u\left(\frac{q}{\rho_n}; \vartheta\right) d\vartheta. \quad (10)$$

Нетрудно проверить, что (10) принадлежат к классу M на сегменте $[-\pi; \pi]$, и поэтому, на основании теоремы Хелли, можно считать, что последовательность чисел ρ_n уже такова, что при $n \rightarrow +\infty$ в каждой точке сегмента $[-\pi; \pi]$ выполняются равенства

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n(\theta) = \mu_1(\theta), \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \psi_n(\theta) = \mu_2(\theta),$$

где $\mu_1(\theta)$ и $\mu_2(\theta)$ — тоже функции класса M . Применяя известную формулу Вилья, получаем

$$u(r; \vartheta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Re} F(ze^{-i\theta}; \rho_n) d\varphi_n(\theta) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Re} F\left(\frac{q_n}{z} e^{i\theta}; \rho_n\right) d\psi_n(\theta) - 1, \quad (11)$$

где $q_n = q/\rho_n$, а $F(z; \rho_n)$ есть функция, аналогичная функции $F(z)$, для кольца $K_z(q/\rho_n; \rho_n)$. Предельный переход в формуле (11) при $n \rightarrow +\infty$ с последующим образованием комплекса $f(z) = u(r; \vartheta) + iv(r; \vartheta)$ и дает формулу (8).

Примечание. При $q \rightarrow 0$ формула (8) превращается в

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1+ze^{-i\theta}}{1-ze^{-i\theta}} d\mu_1(\theta), \quad (12)$$

определяющую класс нормированных C -функций в круге $|z| < 1$, и мы получаем теорему Рисса — Герглотца (1).

2. Условимся называть звездными в кольце $K_z(q; 1)$ такие регулярные однолистные в этом кольце функции $\varphi(z)$, которые преобразуют окружности $|z| = r$, $0 < r < 1$, в простые замкнутые линии φ -плоскости, звездные относительно точки $\varphi = 0$. Тогда нетрудно убедиться, что функция $f(z) = z\varphi'(z)/\varphi(z)$ является нормированной C -функцией в кольце $K_z(q; 1)$, и мы получаем следующую теорему:

Теорема 2. Необходимым и достаточным условием для того, чтобы функция $\varphi(z)$ была звездной в кольце $K_z(q; 1)$, является представимость ее формулой

$$\varphi(z) = Cz \exp \left\{ -\frac{1}{\pi} R(z) \right\}, \quad (13)$$

$$\text{где } R(z) = \int_{-\pi}^{\pi} \ln \tilde{\vartheta}_1 \left(\frac{1}{2\pi i} \ln ze^{-i\theta}; q \right) d\mu_1(\theta) - \int_{-\pi}^{\pi} \ln \vartheta_0 \left(\frac{1}{2\pi i} \ln ze^{-i\theta}; q \right) d\mu_2(\theta);$$

$$\tilde{\vartheta}_1 \left(\frac{1}{2\pi i} z; q \right) = A (1-z) \prod_{k=1}^{+\infty} (1 - q^{2k}z) (1 - q^{2k}z^{-1}); \quad A = \prod_{k=1}^{+\infty} (1 - q^{2k});$$

$\vartheta_0 \left(\frac{1}{2\pi i} \ln z; q \right) = A \prod_{k=1}^{+\infty} (1 - q^{2k-1}z) (1 - q^{2k-1}z^{-1})$; $0 < q < |z| < 1$; C — комплексная постоянная; $\mu_1(\theta)$ и $\mu_2(\theta)$ — функции класса M на сегменте $[-\pi; \pi]$.

Примечание. При $q \rightarrow 0$ формула (13) превращается в

$$\varphi(z) = Cz \exp \left\{ -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln (1 - ze^{-i\theta}) d\mu_1(\theta) \right\}, \quad (14)$$

определяющую класс регулярных звездных в круге $|z| < 1$ функций, нормированных условием $\varphi(0) = 0$.

3. Условимся называть спиральными в кольце $K_z(q; 1)$ такие регулярные в этом кольце аналитические функции $\varphi(z)$, для которых выполняется следующее условие: функция $e^{i\alpha} z\varphi'(z)/\varphi(z)$ при надлежащем выборе α из интервала $(-\pi/2; \pi/2)$ есть C -функция в кольце $K_z(q; 1)$. Очевидно, класс звездных в кольце $K_z(q; 1)$ функций содержится в классе спиральных функций. Можно доказать, что спиральные функции однолиственны в кольце $K_z(q; 1)$.

Несколько обобщая формулу (8), получаем следующую теорему:

Теорема 3. Необходимым и достаточным условием для того, чтобы функция $\varphi(z)$ была спиральной в кольце $K_z(q; 1)$, является представимость ее при некотором фиксированном α из интервала $(-\pi/2; \pi/2)$ формулой вида

$$\varphi(z) = Cz \exp \left\{ -\frac{1}{\pi} \cos \alpha e^{i\alpha} R(z) \right\}, \quad (15)$$

где $R(z)$ — та же самая функция, что и в формуле (13). При $q \rightarrow 0$ формула (15) превращается в структурную формулу для класса спиральных функций в круге $|z| < 1$, которую можно получить и другими методами (2, 3).

4. Условимся называть „выпуклой“ в кольце $K_z(q; 1)$ такую регулярную аналитическую в этом кольце функцию $\varphi(z)$, которая преобразует каждую окружность $|z| = r$, $q < r < 1$, в простую замкнутую выпуклую кривую φ -плоскости.

Теорема 4. *Необходимым и достаточным условием для того, чтобы функция $\varphi(z)$ была выпуклой в кольце $K_z(q; 1)$, является ее представимость следующей формулой:*

$$\varphi(z) = C_1 \int \exp \left\{ -\frac{1}{\pi} R(z) \right\} dz + C_2, \quad (16)$$

где C_1 и C_2 — комплексные постоянные, а функция $R(z)$ такая же, как в (13).

Примечание. При $q \rightarrow 0$ формула (16) превращается в структурную формулу класса выпуклых в круге $|z| < 1$ функций, которая может быть получена и иначе (2, 3).

5. До сих пор рассматривались только классы регулярных однолистных в кольце $K_z(q; 1)$ функций. Для дальнейшего необходима:

Теорема 5. *Необходимым и достаточным условием для того, чтобы $f(z)$ была однозначной аналитической функцией в кольце $K_z[q; 1]$ с единственной особенностью — простым полюсом $z = a$, $0 < q < |a| < 1$, в этом кольце, является представимость ее формулой*

$$f(z) = \omega(z; a) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(ze^{-i\theta}) f_1(\theta) d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F\left(\frac{q}{z} e^{i\theta}\right) f_2(\theta) d\theta + C + iD, \quad (17)$$

$$\text{где } \omega(z; a) = \frac{1}{2\pi i} \left[\frac{A}{a} Z_1\left(\frac{1}{2\pi i} \ln \frac{z}{a}; q\right) + \frac{\bar{A}}{a} Z_1\left(\frac{1}{2\pi i} \ln \frac{z}{a^*}; q\right) \right], \quad a^* = \frac{1}{a},$$

$$f_1(\theta) = \lim_{r \rightarrow 1} [\operatorname{Re} f(re^{i\theta})], \quad f_2(\theta) = \lim_{r \rightarrow q} [\operatorname{Re} f(re^{i\theta})], \quad \int_{\pi}^{\pi} f_1(\theta) d\theta = 2\pi \operatorname{Re} \left(\frac{A}{a} \right) +$$

$$+ \int_{-\pi}^{\pi} f_2(\theta) d\theta, \quad C + iD = \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=r} \frac{f(z)}{z} dz \quad (0 < q < r < |a| < 1), \quad F(z) \text{ и } Z_1(\zeta; q) \text{ определяются формулами (7) и (4).}$$

Для доказательства достаточно заметить, что функция $\omega(z; a)$ имеет в кольце $K_z[q; 1]$ только простой полюс $z = a$ с вычетом A , а на окружностях $|z| = q$ и $|z| = 1$ вещественная часть $\omega(z; a)$ постоянна и равна $-\operatorname{Re}(A/a)$ и 0, соответственно.

Пользуясь теоремой 5, можно доказать следующее:

Теорема 6. *Необходимым и достаточным условием для того, чтобы функция $\varphi(z)$ однолистно отображала кольцо $K_z(q; 1)$ на φ -плоскость с двумя вырезами в форме выпуклых фигур, является ее представимость формулой*

$$\varphi(z) = C_1 \int \frac{\exp \left\{ \frac{1}{\pi} Q(z) \right\}}{Q_1(z)} dz + C_2, \quad (18)$$

где C_1 и C_2 — комплексные постоянные, $Q(z) = \int_{-\pi}^{\pi} \ln \tilde{\vartheta}_1\left(\frac{1}{2\pi i} \ln ze^{-i\theta}; q\right) \times$
 $\times d\mu_1(\theta) + \int_{-\pi}^{\pi} \ln \vartheta_0\left(\frac{1}{2\pi i} \ln ze^{-i\theta}; q\right) d\mu_2(\theta)$, $Q_1(z) = \tilde{\vartheta}_1^2\left(\frac{1}{2\pi i} \ln \frac{z}{a}; q\right) \tilde{\vartheta}_1^2 \times$
 $\times \left(\frac{1}{2\pi i} \ln \frac{z}{a^*}; q\right)$, $a^* = \frac{1}{a}$, $\mu_1(\theta)$ и $\mu_2(\theta)$ — функции класса M на сегменте $[-\pi; \pi]$.

Поступило
21 VII 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Н. И. Ахизер, М. Г. Крейн, О некоторых вопросах теории моментов, 1938. ² В. А. Зморозич, Кив. держ. пед. ин-ту, 6 (1948). ³ В. А. Зморозич, ДАН, 72, № 5 (1950).