Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXVI, № 3

МАТЕМАТИКА

И. М. ГЕЛЬФАНД и М. И. ГРАЕВ

УНИТАРНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ПРОСТЫХ ГРУПП ЛИ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 7 VII 1952)

1. В работе [1] были описаны все неприводимые унитарные представления комплексных классических групп. Унитарные представления вещественных простых групп были разобраны для компактных групп и в [2] — для случая группы вещественных матриц второго порядка (см. также [3]). В этой заметке изучаются унитарные представления вещественных простых групп Ли, имеющих по сравнению с комплексными группами ряд специфических особенностей.

2. Согласно [1], представления комплексных групп задаются по существу следующим образом. Выбирается подгруппа группы G, порожденная положительными корневыми векторами (подгруппа Z в обозначениях [1]) и рассматривается затем пространство правых классов смежности G по Z (H в обозначениях [1]). Обозначим через D коммутативную подгруппу, порожденную нулевыми корневыми векторами, и рассмотрим функции на H, удовлетворяющие функциональному уравнению $f(\delta h) = \chi(\delta) f(h)$, где $\chi(\delta)$ — некоторый (не обязательно равный по модулю единице) характер группы D. Представления невырожденных серий строятся в пространстве таких функций; операторы представления задаются сдвигами в многообразии классов смежности, и соответствующим образом определяется скалярное произведение. Аналогично строятся представления вырожденных серий.

В такой форме эта конструкция неприменима к вещественным группам. Действительно, если G — некоторая вещественная форма простой комплексной группы $G_{\text{компл}}$, то подгруппа Z, порожденная положительными корневыми векторами группы $G_{\text{компл}}$, и ее сопряженные $Z^g = g^{-1} Z g$ ($g \in G_{\text{компл}}$) могут иметь существенно различные пересечения с G либо вообще иметь в пересечении с G только единичный элемент e (как в случае компактной группы G). Тем не менее оказывается возможным некоторое своеобразное обобщение пространства функций, постоянных на классах смежности G по Z.

Обозначим через X_i операторы Ли над функциями $f(g)$, $g \in G$, отвечающие инфинитезимальным сдвигам при помощи бесконечно малых элементов из Z^{g_1} ($g_1 \in G_{\text{компл}}$). Для комплексной группы G введенное пространство функций, постоянных на классах смежности по Z^{g_1}, есть совокупность функций, удовлетворяющих дифференциальным уравнениям $X_i f = 0$. Эта система уравнений является в случае комплексной группы гиперболической системой, характеристиками которой и служат указанные выше классы смежности. В случае вещественной группы G для $\zeta \in Z^{g_1}$ ($g_1 \in G_{\text{компл}}$) можно формально составить те же операторы

Ли X_i (вводя, как обычно, $\partial/\partial z = {}^1/_2 (\partial/\partial x - i\partial/\partial y)$ и $\partial/\partial\bar{z} = {}^1/_2(\partial/\partial x + i\partial/\partial y)$. Пространство функций определяется тогда как совокупность функций $f(g)$, где g пробегает вещественную группу G, удовлетворяющих уравнениям $X_i f = 0$. Однако, если пересечение G с Z^{g_1} имеет более низкую размерность, то система уравнений не будет уже гиперболической. Функции, удовлетворяющие этим уравнениям, будут определены в многообразии классов смежности G по $G \cap Z^{g_1}$ и обычно будут функциями, аналитическими по некоторым из параметров в этом пространстве классов смежности. При этом к существенно различным совокупностям функций мы можем притти лишь в том случае, если соответствующие подгруппы $G \cap Z^{g_1}$ и $G \cap Z^{g_2}$ $(g_1, g_2 \in G_{\text{компл}})$ не сопряжены между собой в G. Представления строятся затем на однородных функциях в этих совокупностях, т. е. на функциях, удовлетворяющих функциональному уравнению $f(\delta\bar{h}) = \chi(\delta) f(\bar{h})$, где $\delta \in D$, $\bar{h} \in G / G \cap Z^{g_1}$ и χ — характер группы D. Среди указанных многообразий нужно еще отобрать те, на которых реализуются унитарные представления. Отметим, что задача о перечислении многообразий эквивалентна задаче о разбиении пространства,классов смежности $G_{\text{компл}}$ по Z (т. е. H в обозначениях (1)) на классы транзитивности относительно правых умножений на элементы из G. Заметим также, что для случая компактных групп указанная здесь конструкция тесным образом связана с теорией конечномерных представлений.

Подробное описание возникающих таким образом различных серий неприводимых унитарных представлений, вычисление их характеров и доказательство того, что этими представлениями исчерпываются все неприводимые унитарные представления, будет приведено позже. Здесь мы опишем основные невырожденные серии неприводимых унитарных представлений вещественной унимодулярной группы n-го порядка.

3. Основные невырожденные серии представлений вещественной унимодулярной группы n-го порядка.

Представления распадаются на $\left[\frac{n}{2}\right] + 1$ серий $D_0, D_1, \ldots, D_{\left[\frac{n}{2}\right]}$ *.

Опишем представления серии D_m. Положим $r_1 = r_2 = \ldots = r_m = 2$ $r_{m+1} = r_{m+2} = \ldots = r_{m+\tau} = 1$ $(2m + \tau = n)$ и будем записывать матрицы g группы $G_{\text{компл}}$ как клеточные матрицы $g = \| g_{pq} \|$ $(p, q = 1, \ldots, m+\tau)$, где g_{pq} — матрица, состоящая из r_p строк и r_q столбцов. Будем обозначать через $\dot{z}$ матрицы вида $\|z_{pq}\|$, где $z_{pp} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z_p & 1 \end{pmatrix}$, $\operatorname{Im} z_p \neq 0$ $(p = 1, \ldots, m)$, $z_{pp} = 1$ при $p > m$ и $z_{pq} = 0$ при $p \neq q$.

Будем обозначать далее через $\hat{k}$ вещественные матрицы вида $\| k_{pq} \|$, где $k_{pq} = 0$ при $p > q$, и через $\hat{z}$ — вещественные матрицы вида $\| x_{pq} \|$, где x_{pp} — единичные матрицы, а $x_{pq} = 0$ при $p < q$. Любая матрица $g \in G$ (за исключением многообразия меньшего числа измерений) может быть однозначно представлена в виде $g = \hat{k}\hat{z}$.

Представления серии D_m задаются m целыми положительными числами $k_1, k_2, \ldots, k_m$, $m + \tau - 1$ вещественными числами $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{m+\tau-1}$ и индексом p $(0 \leqslant p < \tau)$.

При $m \neq n/2$ представления реализуются в пространстве функций

$$f(\dot{z}, \hat{z}) = f(z_1, \ldots, z_m, \hat{z}),$$

где $\dot{z}$ и $\hat{z}$ пробегают все описанные выше матрицы, а $f(z_1, \ldots, z_m, \hat{z})$ — аналитические функции относительно каждого z_s $(s = 1, \ldots, m)$ отдельно в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z_s > 0$ и в нижней полуплоскости $\operatorname{Im} z_s < 0$.

* Номер серии определяется числом невещественных собственных значений у матриц соответствующей подгруппы $G \cap (DZ)^g$.

Скалярное произведение задается формулой

$$(f_1, f_2) = \int f_1(z_1, \ldots, z_m, \hat{z}) \overline{f_2(z_1, \ldots, z_m, \hat{z})} \prod_{s=1}^{m} |\operatorname{Im} z_s|^{k_s - 2} d\mu(\hat{z}) \, d\dot{z}, \qquad (1)$$

где $d\dot{z} = \prod_{s=1}^{m} dx_s \, dy_s \; (z_s = x_s + iy_s)$.

При $m = n/2$ серия D_m состоит из двух частей, D_m^+ и D_m^-, из которых первая реализуется в пространстве функций $f(z_1, \ldots, z_m, \hat{z})$ того же типа, но определенных лишь в области $\prod_{s=1}^{m} \operatorname{Im} z_s > 0$, а вторая — в пространстве функций, определенных в области $\prod_{s=1}^{m} \operatorname{Im} z_s < 0$.

Операторы T_g представлений задаются формулой:

$$T_g f(z_1, z_2, \ldots, z_m, \hat{z}) = f(z_1', z_2', \ldots, z_m', \hat{z}') \times$$
$$\times \prod_{s=1}^{m} (\beta_s z_s + \delta_s)^{-k_s} |d_s|^{k_s/2} \prod_{s=1}^{m+\tau-1} |d_s|^{i\rho_s} \cdot \prod_{s=m+1}^{m+p} \operatorname{sign} d_s \cdot \beta^{-1/2}(\hat{k}). \qquad (2)$$

Здесь $\hat{z}'$ и $\hat{k}$ определяются из выражения $\hat{z}g = \hat{k}\hat{z}'$; $z_s' = \dfrac{\alpha_s z_s + \gamma_s}{\beta_s z_s + \delta_s}$, где $\alpha_s, \beta_s, \gamma_s, \delta_s$ — элементы матрицы

$$k_{ss} = \begin{pmatrix} \alpha_s & \beta_s \\ \gamma_s & \delta_s \end{pmatrix} \quad (s = 1, \ldots, m).$$

Наконец, $d_s = \det k_{ss}$ и

$$\beta(\hat{k}) = |d_2|^{r_1 + r_2} |d_3|^{r_1 + 2r_2 + r_3} \ldots |d_{m+\tau}|^{r_1 + 2r_2 + \ldots + 2r_{m+\tau-1} + r_{m+\tau}}.$$

Как частный случай отсюда получаются основные серии представлений унимодулярной группы порядка 2, описанные Баргманом [2].

Теорема 1. *Представления основных серий $D_0, D_1, \ldots, D_{\left[\frac{n}{2}\right]}$ неприводимы.*

Поступило
26 VI 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. М. Гельфанд, М. А. Наймарк, Тр. Ин-та им. Стеклова, 36 (1950). [2] V. Bargmann, Ann. of Math., 48:3 (1947). [3] Harish-Chandra, Proc. Nat. Acad. Sci., 37, No. 3, 6, 10 (1951).