Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXVI, № 3

МАТЕМАТИКА

Н. П. ВЕКУА

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

(Представлено академиком Н. И. Мусхелишвили 5 VII 1952)

1. Пусть L — совокупность простых замкнутых достаточно гладких непересекающихся плоских контуров, ограничивающих некоторую конечную связную область D^+. Область, дополняющую $D^+ + L$ до полной плоскости, обозначим через D^- и будем считать, что начало координат находится в D^+. В настоящей заметке мы даем решение следующей граничной задачи:

Найти кусочно-голоморфный вектор

$$\Phi(z) = [\Phi_1(z),\ \Phi_2(z), \ldots, \Phi_n(z)],$$

имеющий конечный порядок на бесконечности, по граничному условию

$$\Phi^+(t_0) = A(t_0)\,\Phi^-(t_0) + B(t_0)\,\overline{\Phi^-(t_0)} + g(t_0), \tag{1}$$

где $\Phi^+(t_0)$ и $\Phi^-(t_0)$ обозначают граничные значения, соответственно, из D^+ и D^- вектора $\Phi(z)$ на контуре L; $g = (g_1, g_2, \ldots, g_n)$ — заданный вектор, удовлетворяющий условию H (Гельдера); $A(t_0)$, $B(t_0)$ — заданные матрицы:

$$A(t_0) = \|A_{kl}(t_0)\|, \quad B(t_0) = \|B_{kl}(t_0)\| \quad (k,\ l = 1, 2, \ldots, n),$$

также удовлетворяющие условию H.

В равенстве (1) эти матрицы рассматриваются как матрицы линейных преобразований векторов. Мы будем предполагать, что определитель $\det A(t_0)$ отличен от нуля всюду на L.

Эта задача, поставленная в работе А. И. Маркушевича ([1]), является некоторым обобщением известной граничной задачи Гильберта для нескольких неизвестных функций (см. ([2]), гл. 6, или ([3]), гл. 1).

2. Рассмотрим сперва однородную граничную задачу:

$$\Phi^+(t_0) = A(t_0)\,\Phi^-(t_0) + B(t_0)\,\overline{\Phi^-(t_0)} \tag{2}$$

и будем искать решения этой задачи в виде:

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{A(t)\,\rho(t) + B(t)\,\overline{\rho(t)}}{t-z}\,dt \qquad &\text{при } z \in D^+, \\ \Phi(z) &= -\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\rho(t)\,dt}{t-z} + \gamma(z) \qquad &\text{при } z \in D^-, \end{aligned} \tag{3}$$

где $\gamma(z)$ — произвольно заданная главная часть вектора $\Phi(z)$ на бесконечности; $\rho(t)$ — искомый вектор, от которого мы требуем, чтобы он удовлетворял условию H.

Как легко видеть, любое решение задачи (2) представимо формулами (3).

Вычисляя граничные значения $\Phi^+(t_0)$ и $\Phi^-(t_0)$ по известным формулам Сохоцкого — Племеля и подставляя в (2), получаем следующее сингулярное интегральное уравнение для определения $\rho(t)$:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{A(t)+A(t_0)}{t-t_0}\,\rho(t)\,dt+\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{B(t)-B(t_0)K(t_0,t)}{t-t_0}\overline{\rho(t)}\,dt=$$
$$=A(t_0)\gamma(t_0)+B(t_0)\overline{\gamma(t_0)},\tag{4}$$

где

$$K(t_0,t)=1-2i(t-t_0)\frac{d\vartheta}{dt},\qquad \vartheta=\arg(t-t_0).$$

Уравнения такого типа рассмотрены в работе Г. Ф. Манджавидзе [4]. На основании результатов этой работы, необходимое и достаточное условие разрешимости уравнения (4) имеет вид:

$$\operatorname{Re}\int_L \nu(t)\left[A(t)\gamma(t)+B(t)\overline{\gamma(t)}\right]dt=0,\tag{5}$$

где $\nu(t)$ — произвольное решение однородного уравнения

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{A'(t_0)-A'(t)}{t-t_0}\nu(t)\,dt-\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{B'(t_0)\,t_0'^2}\,K(t_0,t)-\overline{B'(t)\,t'^2}}{t-t_0}\overline{\nu(t)}\,dt=0,\tag{6}$$

союзного с уравнением (4), причем A' и B' — транспонированные матрицы по отношению к A и B, $t'=dt/ds$ (s — дуговая абсцисса).

Рассмотрим теперь следующую однородную граничную задачу:

$$\psi^-(t_0)=A'(t_0)\psi^+(t_0)+\overline{B'(t_0)\,t_0'^2}\,\overline{\psi^+(t_0)},\tag{7}$$

которую мы будем называть **союзной** с задачей (2).

Будем искать исчезающие на бесконечности решения этой задачи в следующем виде:

$$\begin{aligned}
\psi(z)&=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\nu(t)\,dt}{t-z}\quad \text{при } z\in D^+,\\
\psi(z)&=-\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{A'(t)\nu(t)+\overline{B'(t)}\,\overline{t'^2\nu(t)}}{t-z}\,dt\quad \text{при } z\in D^-.
\end{aligned}\tag{8}$$

Вычисляя $\psi^+(t_0)$ и $\psi^-(t_0)$ по формулам Сохоцкого — Племеля и подставляя в (7), получим относительно $\nu(t)$ написанное выше сингулярное интегральное уравнение (6).

Будем временно считать, что задача (7) не имеет исчезающих на бесконечности (отличных от нуля) решений. Тогда, как легко видеть, для любого решения уравнения (6), на основании (8), будем иметь

$$A'(t)\,\nu(t) + B'(t)\,\bar{t}^{\,2}\,\overline{\nu(t)} = \Omega^{+}(t), \qquad \nu(t) = \Omega^{-}(t), \tag{9}$$

где $\Omega(z)$ — кусочно-голоморфный вектор, исчезающий на бесконечности. Принимая во внимание (9), нетрудно показать, что условие (5) действительно выполняется.

Таким образом, мы доказали следующую теорему:

Теорема. *Если союзная однородная задача* (7) *не имеет исчезающих на бесконечности решений* *, *то уравнение* (4) *всегда разрешимо и каждое решение этого уравнения при помощи формул* (3) *дает определенное решение задачи* (2); *таким путем получаются все решения этой задачи.*

Вернемся теперь к общему случаю, когда задача (7) может иметь исчезающие на бесконечности решения. Прежде всего нетрудно показать существование такого числа r, что порядок нуля на бесконечности любого решения задачи (7) не превосходит r.

Рассмотрим теперь задачу:

$$\dot{\Phi}^{+}(t_0) = A(t_0)\,t_0^{r}\,\dot{\Phi}^{-}(t_0) + B(t_0)\,(\bar{t}_0)^{r}\,\overline{\dot{\Phi}^{-}(t_0)}, \tag{10}$$

где r — только что указанное число. Легко проверить, что для этой задачи соблюдаются условия предыдущей теоремы.

Очевидно, что если $\dot{\Phi}(z)$ является решением граничной задачи (10), то кусочно-голоморфный вектор $\Phi(z)$, определенный формулами

$$\Phi(z) = \dot{\Phi}(z) \qquad \text{при } z \in D^{+},$$

$$\Phi(z) = z^{r}\dot{\Phi}(z) \qquad \text{при } z \in D^{-},$$

будет определенным решением граничной задачи (2).

Таким образом, найдя общее решение задачи (10), можно найти также общее решение и задачи (7).

3. Рассмотрим теперь неоднородную задачу:

$$\Phi^{+}(t_0) = A(t_0)\,\Phi^{-}(t_0) + B(t_0)\,\overline{\Phi^{-}(t_0)} + g(t_0). \tag{11}$$

Будем искать решение этой задачи в виде:

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{A(t)\,\rho(t) + B(t)\,\overline{\rho(t)} + g(t)}{t - z}\,dt \qquad \text{при } z \in D^{+},$$

$$\Phi(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\rho(t)\,dt}{t - z} + \gamma(z) \qquad \text{при } z \in D^{-},$$

где $\gamma(z)$ — главная часть вектора $\Phi(z)$ на бесконечности, $\rho(t)$ — искомый вектор.

---

* Ниже покажем, что к этому случаю может быть сведен и самый общий случай.

Как легко видеть, мы получим в этом случае интегральное уравнение относительно $\rho(t)$, отличающееся от уравнения (8) лишь правой частью. Упомянутое уравнение всегда разрешимо, если задача (7) не имеет исчезающих на бесконечности решений (отличных от нуля). Если задача (7) имеет такие решения, то, поступая совершенно так, как выше, можно получить самое общее решение задачи (11).

Тбилисский государственный университет им. И. В. Сталина

Поступило 20 VI 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. И. Маркушевич, Уч. зап. Моск. гос. ун-та, 1, в. 100 (1946).
[2] Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные интегральные уравнения, М.—Л., 1946.
[3] Н. П. Векуа, Системы сингулярных интегральных уравнений, М.—Л., 1950.
[4] Г. Ф. Манджавидзе, Сообщ. АН Гр.ССР, 11, № 6 (1950).