

Е. А. БАРБАШИН и Н. Н. КРАСОВСКИЙ

## ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ В ЦЕЛОМ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 5 VII 1952)

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = X_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1)$$

где правые части  $X_i$  — непрерывно дифференцируемые функции переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$  в области  $-\infty < x_i < +\infty, i = 1, 2, \dots, n$ . Мы предполагаем также, что в начале координат функции  $X_i$  обращаются в нуль.

Мы скажем, что тривиальное решение  $x_i = 0$  системы (1) асимптотически устойчиво при любых начальных возмущениях, если оно устойчиво в смысле Ляпунова (при достаточно малых возмущениях) и если всякое другое решение  $x_i(t)$  системы (1) обладает свойством  $\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = 0, i = 1, 2, \dots, n$ .

Известно<sup>(1, 2)</sup>, что для асимптотической устойчивости в смысле Ляпунова необходимо и достаточно существование определенно-положительной функции  $v(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , имеющей определенно-отрицательную производную по времени. Легко, однако, построить пример, показывающий, что существование функции Ляпунова не обеспечивает асимптотической устойчивости в целом.

В самом деле, рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{2x}{(1-x^2)^2} + 2y, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{2y}{(1+x^2)^2} - \frac{2x}{(1+x^2)^2}. \quad (2)$$

Для этой системы функцией Ляпунова будет служить положительно-определенная функция  $v(x, y) = y^2 + \frac{x^2}{1+x^2}$ . Имеем далее

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{4x^2}{(1+x^2)^4} - \frac{4y^2}{(1+x^2)^2}. \quad (3)$$

Очевидно,  $dv/dt$  является определенно-отрицательной функцией. Мы укажем тем не менее, что в плоскости  $(x, y)$  имеется область неустойчивости системы (2). В самом деле, рассмотрим кривую  $(\gamma)$ , заданную уравнением  $y = 2 + \frac{1}{1+x^2}$ . Вычислив  $\frac{dx}{dt}$  и  $\frac{dy}{dt}$  вдоль этой кривой

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} + 4 + \frac{2}{1+x^2},$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{(1+x^2)^2} \left( 4 + \frac{2}{1+x^2} \right) - \frac{2x}{(1+x^2)^2}, \quad (4)$$

находим:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{2(1+x^2)^2} \left( \frac{1 + \frac{1}{x} \left( 2 + \frac{1}{1+x^2} \right)}{1 + \frac{1}{2(1+x^2)} - \frac{x}{2(1+x^2)^2}} \right). \quad (5)$$

Очевидно, можно выбрать  $x_0$  столь большим, что при  $x \geq x_0$  будем иметь  $dx/dt > 0$  и  $dy/dt > -x/(1+x^2)^2$  для точек кривой  $(\gamma)$ . Так как угловой коэффициент касательной к кривой  $(\gamma)$  равен  $-2x/(1+x^2)^2$ , то мы приходим к выводу, что при  $x > x_0$  траектории системы (2) пересекают кривую  $(\gamma)$  снизу вверх. Так как  $dx/dt > 0$  в точке пересечения прямой  $x = x_0$  и кривой  $(\gamma)$ , то, тем более, мы будем иметь  $dx/dt > 0$  в точках прямой  $x = x_0$ , лежащих над кривой  $(\gamma)$ , и, следовательно, всякая траектория системы (2) пересекает верхний участок прямой  $x = x_0$  слева направо при возрастании  $t$ . Рассмотрим теперь область  $G$ , определенную неравенствами  $x \geq x_0$ ,  $y \geq 2 + 1/(1+x^2)$ . Из предыдущих соображений видно, что никакая точка области  $G$  не может при возрастании  $t$  покинуть область  $G$  и, следовательно, не может приблизиться к началу координат.

Спрашивается, какое же дополнительное ограничение нужно положить на функцию Ляпунова, чтобы существование ее обеспечивало асимптотическую устойчивость в целом. Для выяснения этого вопроса назовем функцию  $v(x_1, x_2, \dots, x_n)$  бесконечно большой, если для всякого положительного числа  $A$  можно указать число  $N$  настолько большое, что при  $\sum_{i=1}^n x_i^2 > N$  будем иметь  $v(x_1, x_2, \dots, x_n) > A$ .

**Теорема 1.** Если существует определенно-положительная бесконечно большая функция  $v(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , имеющая определенно-отрицательную производную, то тривиальное решение системы (1) асимптотически устойчиво при любых начальных возмущениях.

Доказательство этой теоремы проводится методом А. М. Ляпунова, если принять во внимание то обстоятельство, что любая область  $v \leq c$  является при наших предположениях ограниченной.

Предположим теперь, что все решения системы (1) продолжимы на интервале  $-\infty < t \leq 0$ .

**Теорема 2.** Если тривиальное решение  $x_i = 0$  асимптотически устойчиво при любых начальных возмущениях, то существует непрерывно дифференцируемая бесконечно большая и определенно-положительная функция  $v(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , имеющая определенно-отрицательную производную по времени.

Пусть  $k$  — положительная постоянная такая, что  $\sum_{i=1}^n X_i^2 < k^2 \sum_{i=1}^n x_i^2$  в достаточно малой окрестности начала координат. Как следует из теоремы 3.3 главы I работы (2), существует во всем пространстве непрерывно дифференцируемая и определенно-положительная функция  $v$ , удовлетворяющая уравнению  $\sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial v}{\partial x_i} + 3kv = 0$ . Очевидно, производная по времени  $dv/dt$ , равная  $-3kv$ , будет определенно-отрицательной функцией.

Заметим теперь, что значения функции  $v$  меняются вдоль любой траектории системы (1) по закону  $v = v_0 e^{-3kt}$ , где  $v_0$  — значение функ-

ции  $v$  в начальной точке. Если начальная точка не совпадает с началом координат, то мы видим, что  $v$  неограниченно возрастает при  $t \rightarrow -\infty$ .

Пусть теперь  $A$  — любое положительное число, и рассмотрим поверхность  $v = A$ . Эта поверхность, как следует из леммы 3.1 главы I работы (2), является ограниченной и делит фазовое пространство на две части, одна из которых тоже является ограниченной. Можно, очевидно, указать шар настолько большого радиуса, чтобы область  $v \leq A$  лежала целиком внутри этого шара. Вне данного шара будем иметь  $v > A$ . Таким образом, функция  $v$  является бесконечно большой.

Предположим теперь, что все решения системы (1) продолжимы на интервале  $0 \leq t < +\infty$ .

**Теорема 3.** *Если существует непрерывно дифференцируемая определенно-положительная функция  $v(x_1, x_2, \dots, x_n)$  такая, что для любого положительного числа  $\varepsilon$  можно указать положительное число  $k$ , удовлетворяющее условию*

$$\frac{dv}{dt} < -k \quad \text{при} \quad \sum_{i=1}^n x_i^2 > \varepsilon,$$

то тривиальное решение  $x_i = 0$  системы (1) будет асимптотически устойчивым при любых начальных возмущениях.

Доказательство теоремы 3 проводится точно так же, как доказательство соответствующей теоремы А. М. Ляпунова (1). Дополнительное условие теоремы 3 обеспечивает наличие верхней грани  $dv/dt$  вне сферы достаточно малого радиуса, что и позволяет нам применить соответствующее рассуждение А. М. Ляпунова.

Укажем теперь одно обобщение теоремы 1.

**Теорема 4.** *Пусть существует бесконечно большая определенно-положительная функция  $v(x_1, x_2, \dots, x_n)$  и множество  $M$  такие, что*

$$dv/dt < 0 \quad \text{вне} \quad M; \quad dv/dt \leq 0 \quad \text{на} \quad M.$$

Пусть множество  $M$  обладает тем свойством, что на любом пересечении множеств  $v = c$  ( $c \neq 0$ ) и  $M$  не содержится положительных полутраекторий системы (1). Мы утверждаем, что тривиальное решение  $x_i = 0$  системы (1) асимптотически устойчиво при любых начальных возмущениях.

В самом деле, пусть дана точка  $p$  из фазового пространства. Она будет двигаться по траектории системы (1). Обозначим положение точки  $p$  в момент времени  $t$  через  $f(p, t)$ . Функция  $v(t) = v(f(p, t))$  будет, очевидно, невозрастающей функцией времени  $t$ , следовательно, существует предел  $\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = v_0$ . Так как функция  $v$  является беско-

нечно большой, то множество  $v \leq v(p)$  будет ограниченным, и поэтому существует последовательность чисел  $t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$  такая, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \infty$  и последовательность точек  $f(p, t_n)$  сходится к точке  $q$ ,

лежащей в рассматриваемой области. Так как функция  $v$  является непрерывной то мы должны иметь  $v(q) = v_0$ . Более того, точка  $q$ , двигаясь по траектории системы (1), не может при  $t > 0$  сойти с поверхности  $v = v_0$ . В самом деле, если бы точка  $f(q, t)$  при  $t > 0$  оказалась не на поверхности  $v = v_0$ , то, в силу неравенства  $dv/dt \leq 0$ , она попала бы в область  $v < v_0$ , увлекая за собой точки траектории, выходящей из  $p$ , чего не может быть в силу выбора  $v_0$ .

Но, с другой стороны, точка  $q$  не может не сойти с поверхности  $v = v_0$ , если  $dv/dt < 0$ , и поэтому эта точка должна оставаться при

своим движении на множестве  $M$ , где мы имеем  $dv/dt \leq 0$ . Таким образом, все точки  $f(q, t)$  при  $t > 0$  должны лежать в пересечении поверхности  $v = v_0$  с множеством  $M$ , что противоречит условию теоремы, если  $v_0 \neq 0$ . Противоречие исчезает, если допустить, что  $v_0 = 0$ , а это и требовалось доказать.

Заметим, что если множество  $M$ , фигурирующее в формулировке теоремы 4, задано уравнением  $\psi(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ , то необращение в нуль выражения  $\sum_{i=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial x_i} X_i$  всюду на  $M$ , кроме начала координат, обеспечивает отсутствие полутраекторий, лежащих на  $M$ .

Применим теперь теорему 4 к исследованию устойчивости уравнения второго порядка. Рассмотрим уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \varphi\left(\frac{dx}{dt}\right) + g\left(\frac{dx}{dt}\right)f(x) = 0, \quad (6)$$

где функции  $f(x)$ ,  $g(y)$  непрерывны, а функция  $\varphi(y)$  такова, чтобы эквивалентная уравнению (6) система

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -\varphi(y) - g(y)f(x) \quad (7)$$

обладала единственной траекторией, проходящей через любую наперед заданную точку.

**Теорема 5.** Если  $\varphi(y)$ ,  $g(y)$  и  $f(x)$  удовлетворяют условиям: 1)  $f(0) = \varphi(0) = 0$ ; 2)  $f(x)x > 0$  при  $x \neq 0$ ;  $\varphi(y)y > 0$  при  $y \neq 0$ ;  $g(y) > 0$ ; 3)  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \int_0^x f(x) dx = \infty$ ,  $\lim_{|y| \rightarrow \infty} \int_0^y \frac{y}{g(y)} dy = \infty$ , то тривиальное решение  $x = 0$  уравнения (6) асимптотически устойчиво при любых начальных возмущениях.

В самом деле, рассмотрим функцию  $v = \int_0^x f(x) dx + \int_0^y \frac{y}{g(y)} dy$ . Эта функция является, в силу условий теоремы, бесконечно большой и определенно-положительной. Вычисляя производную  $dv/dt$  в силу системы дифференциальных уравнений (7), получим

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{y\varphi(y)}{g(y)}.$$

Очевидно,  $dv/dt$  может обращаться в нуль только при  $y = 0$ . Так как на оси  $y = 0$  нет положительных полутраекторий, то мы находимся в условиях применения теоремы 4.

Уральский политехнический институт  
им. С. М. Кирова

Поступило  
4 VII 1952

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> А. М. Ляпунов, Общая задача об устойчивости движения, М.—Л., 1950, стр. 85. <sup>2</sup> Е. А. Барбашин, Матем. сборн., 29 (71), в. 2, 250 (1951).