

Д. П. КОЛОДНЫЙ

РАСЧЕТ КОЭФФИЦИЕНТА ОБЛУЧЕННОСТИ МЕТОДОМ
ИНТЕГРИРОВАНИЯ ПО НАПРАВЛЕНИЯМ

(Представлено академиком М. В. Кирпичевым 21 VII 1952)

В расчетах лучистого теплообмена иногда большие затруднения вызывает расчет коэффициента облученности φ_{12} поверхности F_2 поверхностью F_1 , определяемого формулой $\varphi_{12} = F_{12}/F_1$, соответственно $\varphi_{21} = F_{21}/F_2$, где $F_{12} = F_{21}$ — «взаимная поверхность», определяемая формулой

$$F_{12} = F_{21} = \int_{F_1} \int_{F_2} \frac{\cos \varphi_1 \cos \varphi_2}{\pi r^2} dF_1 dF_2; \quad (1)$$

r — длина отрезка, соединяющего центры элементов dF_1 и dF_2 ; φ_1, φ_2 — углы между указанным отрезком и нормальными к элементам dF_1, dF_2 . Область интегрирования ограничена следующими условиями: углы φ_1, φ_2 должны быть острыми (рассматриваются две ориентированные поверхности), отрезки не должны пересекать (вторично) ни одной из поверхностей. Эти условия будем называть «условиями видимости».

Расчет F_{12} производится двукратным интегрированием по поверхности в любом порядке:

$$F_{12} = \frac{1}{\pi} \int_{F_1} dF_1 \int_{F_2} \frac{\cos \varphi_1 \cos \varphi_2}{r^2} dF_2 = F_{21} = \frac{1}{\pi} \int_{F_2} dF_2 \int_{F_1} \frac{\cos \varphi_1 \cos \varphi_2}{r^2} dF_1. \quad (2)$$

Для соблюдения «условий видимости» достаточно ограничить область интегрирования только внутреннего интеграла, на что указывает знак.

Вместо формулы (1) применяется также:

$$F_{12} = \frac{1}{\pi} \int_{F_1} \int_{\omega} \cos \varphi_1 dF_1 d\omega, \quad F_{21} = \frac{1}{\pi} \int_{F_2} \int_{\omega} \cos \varphi_2 dF_2 d\omega, \quad (3)$$

где $d\omega$ — элемент телесного угла, вершина которого находится в точке поверхности F_1 (или F_2), а направление меняется в границах, соответствующих указанной области интегрирования.

Расчет F_{12} по формуле (3) по известным методам производится двукратным интегрированием только в одном порядке, а именно:

$$F_{12} = \frac{1}{\pi} \int_{F_1} dF_1 \int_{\omega_{12}} \cos \varphi_1 d\omega; \quad F_{21} = \frac{1}{\pi} \int_{F_2} dF_2 \int_{\omega_{21}} \cos \varphi_2 d\omega, \quad \text{где } \omega'_{12} \text{ (и, соот-}$$

ветственно, ω'_{21}) — телесный угол, под которым поверхность F_2 «видна» из dF_1 .

В настоящей заметке предлагается обращение порядка интегрирования интеграла по формулам (3), а именно*:

$$F_{12} = \frac{1}{\pi} \int_{4\pi} d\omega \int_{F'_{01}} \cos \varphi_1 dF_1; \quad F_{21} = \frac{1}{\pi} \int_{4\pi} d\omega \int_{F'_{02}} \cos \varphi_2 dF_2. \quad (4)$$

В формуле (4) F'_{01} обозначает часть поверхности F_1 , определенную следующими ограничивающими условиями: 1) F_{01} — часть поверхности F_1 , содержащая только те точки, из которых прямые, проведенные в данном направлении (соответствующем элементу $d\omega$), пересекают поверхность F_2 ; 2) F'_{01} — часть (или вся) поверхности F_{01} , отвечающая «условиям видимости».

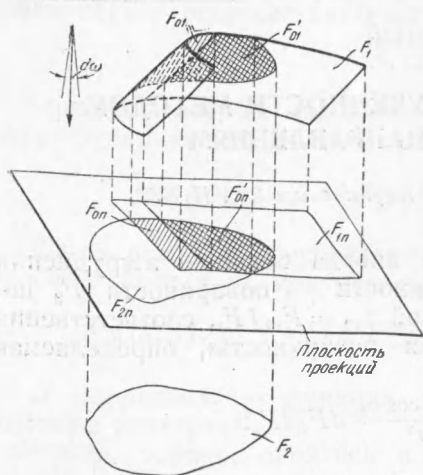


Рис. 1

представляет ортогональную проекцию поверхности F_1 в данном направлении (так называемое «миделево сечение» в данном направлении). Интеграл $F_{0n} = \int_{F_1} \cos \varphi_1 dF_1$

представляет общую площадь (пересечение) двух плоских фигур: ортогональных проекций поверхностей F_1 и F_2 в данном направлении.

Интеграл $F'_{0n} = \int_{F'_{01}} \cos \varphi_1 dF_1$ — часть (или вся) площади F_{0n} , отвечающая «условиям видимости», — может быть назван «взаимной поверхностью в данном направлении». На рис. 1 иллюстрируются применяемые величины: F_{01} , F'_{01} , F_{0n} , F'_{0n} . Очевидно, исходя из формулы (4) для F_{21} и определив F_{2n} , придем к тем же величинам: F_{0n} и F'_{0n} .

Таким образом:

$$F_{12} = F_{21} = \frac{1}{\pi} \int_{4\pi} F'_{0n} d\omega. \quad (5)$$

Преимущество предлагаемого метода заключается в том, что F'_{0n} обычно легко определяется по известным формулам для площадей плоских геометрических фигур или графическим планиметрированием после вычерчивания проекций методами начертательной геометрии.

Часто удобнее находить проекцию F_0 в данном направлении на постоянную плоскость проекций. Очевидно, что $F'_{0n} = F'_0 |\cos \varphi|$, где φ — угол между данным направлением и нормалью к плоскости проекций. Соответственно:

$$F_{12} = \frac{1}{\pi} \int_{4\pi} F'_0 |\cos \varphi| d\omega. \quad (6)$$

* Поскольку «условия видимости» ограничивают только область интегрирования внутреннего интеграла, интегрирование по $d\omega$ происходит по всем возможным направлениям, т. е. в области полной единичной сферы, которой соответствует телесный угол, равный 4π .

Направление элемента $d\omega$ можно определить при помощи сферических координат (ϑ, φ) , ось которых перпендикулярна к плоскости проекций. Тогда, как известно: $d\omega = \sin \varphi d\varphi d\vartheta$ (ϑ — долгота), поэтому:

$$F_{12} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\pi} F'_0 \sin \varphi |\cos \varphi| d\varphi = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_{-1}^1 F'_0 d(\cos 2\varphi). \quad (7)$$

В общем случае каждому значению $\cos 2\varphi$ соответствуют два значения: φ_a и $\varphi_b = \pi - \varphi_a$. Поэтому в формуле (7) $F'_0 = F'_{0a} + F'_{0b}$, где F'_{0a} соответствует направлению (углу) φ_a , а F'_{0b} — углу φ_b ; соответственно нужны две параллельные плоскости проекций с двух сторон поверхности.

Особенно упрощается расчет F_{12} , если одна из поверхностей плоская или ограничена постоянным плоским контуром. Тогда, если выбрать плоскость контура в качестве плоскости проекций, отпадает необходимость проектирования этой поверхности.

При графическом решении вместо интегрирования по формуле (7) применяется суммирование по элементам: $\Delta\vartheta_i = 2\pi/m$, $\Delta(\cos 2\varphi)_k = 2/n$:

$$F_{12} = \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n (F'_0)_{ik}; \quad (8)$$

$(F'_0)_{ik}$ — площадь общей части проекций поверхностей F_1 и F_2 на постоянную плоскость проекций (с учетом «условий видимости») в направлении (ϑ_i, φ_k) , где $\vartheta_i = \frac{2\pi}{m} \left(i - \frac{1}{2}\right)$ ($i = 1, 2, \dots, m$); $\varphi_k = \frac{1}{2} \arccos \left[\frac{2}{n} \left(k - \frac{1}{2}\right) - 1 \right]$ ($k = 1, 2, \dots, n$); m, n — произвольно выбранные целые числа, достаточно большие, чтобы обеспечить необходимую в данном расчете точность.

Как известно, для выпуклой поверхности F_1 , окруженной со всех сторон поверхностью F_2 , $\varphi_{12} = 1$, $F_{12} = F_1$, из чего вытекает, что

$$\frac{1}{\pi} \int_{4\pi} F_1^n d\omega = F_1, \quad (9)$$

т. е. площадь выпуклой поверхности равна интегралу от ее «миделевых сечений» по всем направлениям, разделенному на π .

Для двумерных (плоских) задач вместо поверхностей F_1 и F_2 рассматриваются кривые s_1 и s_2 . Тогда, как известно, $\varphi_{12} = \frac{s_{12}}{s_1}$,

$$s_{12} = \frac{1}{2} \int_{s_1} \int_{s_2} \frac{\cos \varphi_1 \cos \varphi_2}{r} ds_1 ds_2.$$

По предлагаемому методу, аналогично формуле (5),

$$s_{12} = s_{21} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} s'_{0n} d\varphi. \quad (10)$$

Соответственно: s_{1n} (или s_{2n}) — ортогональная проекция кривой s_1 (или s_2) в данном направлении, т. е. «ширина» кривой в данном направлении; s_{0n} — длина общей части отрезков s_{1n} и s_{2n} ; s'_{0n} — то же с учетом «условий видимости».

Легко показать, что если кривая s_1 имеет вогнутости, ее можно в отношении определения s_{12} для любой кривой s_2 заменить кривой s_1^* , огибающей все касательные к кривой s_1 , ее не пересекающие, при условии, что s_1^* не пересекает s_2 . Действительно, тогда в любом направлении $s_{1n} = s_{1n}^*$. Будем говорить, что s_1^* — кривая, «натянута» на s_1 . Ясно, что если s_1 — выпуклая кривая, то s_1^* совпадает с s_1 .

Аналогично (9), в общем случае

$$s_1^* = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} s_{1n} d\varphi, \quad (11)$$

т. е. периметр плоской выпуклой фигуры равен $1/2$ интеграла от ее «ширины» во всех направлениях и в π раз больше «средней ширины». Легко заметить, что в любом направлении *

$$s_{0n}^* = s_{1n} + s_{2n} - s_{3n}; \quad (12)$$

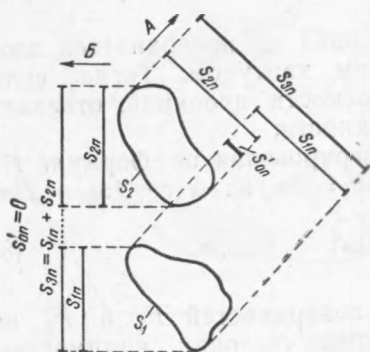


Рис. 2

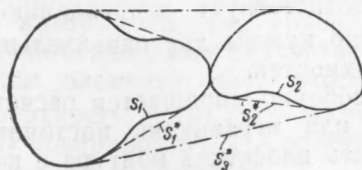


Рис. 3

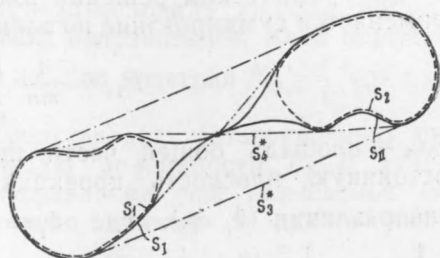


Рис. 4

где s_3 — кривая, состоящая из обеих кривых s_1 и s_2 вместе взятых (см. рис. 2 для двух случаев: А ($s_{0n}^* \neq 0$) и Б ($s_{0n}^* = 0$)).

Если кривые s_1 и s_2 соприкасаются (рис. 3), то кривую s_3 можно заменить кривой s_3^* на нее «натянутой», а кривые s_1 и s_2 — кривыми s_1^* и s_2^* ; тогда, интегрируя (12) по всем направлениям, получим по формуле (10) и с учетом формулы (11), примененной для кривых s_1, s_2, s_3 :

$$s_{12} = 1/2 (s_1^* + s_2^* - s_3^*). \quad (13)$$

Легко заметить, что s_{12} не меняется, если к кривым s_1 и s_2 прибавлять любые фигуры, помещенные внутри углов, образованных общими внутренними касательными к s_1 и s_2 . Действительно, тогда s_{1n}, s_{2n} остаются неизменными во всех тех направлениях, в которых $s_{0n}^* \neq 0$ (случай А на рис. 2), т. е. во всех направлениях, влияющих на величину интеграла, определяющего s_{12} . Поэтому две не соприкасающиеся кривые s_1 и s_2 можно заменить двумя соприкасающимися в точке пересечения двух общих внутренних касательных кривыми s_1 и s_{11} при помощи указанных дополнений (рис. 4). Ясно, что тогда $s_4^* = s_1^* + s_{11}^*$ представляет собой кривую, «натянутую изнутри» на кривые s_1 и s_2 . Поэтому в общем случае $s_{12} = 1/2 (s_1^* - s_3^*)$; s_3^*, s_4^* — кривые, натянутые «снаружи» и «изнутри» на кривые s_1, s_2 . Последняя формула была впервые выведена Г. Поляком (1) из других соображений.

Поступило
18 VIII 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

* Г. Поляк, Изв. Энергетич. ин-та АН СССР, 3 (1935).

* Из «условий видимости» вытекает, что если одна кривая не окружает другую, то в каждом направлении надо учесть только одну сторону, что вызывает наличие коэффициента $1/2$ в формуле (13).