Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXVI, № 5

ТЕХНИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

А. Л. МИКАЭЛЯН

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИКИ

(Представлено академиком Б. А. Введенским 8 VIII 1952)

Рассмотрим плоскую неоднородную среду, свойства которой определяются показателем преломления $n = n(x, y)$. Фронт волны, распространяющейся в такой среде, представляется семейством $S(x, y) = \text{const}$, причем функция $S(x, y)$ связана с показателем преломления в известном уравнении эйконала:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 = [n(x, y)]^2. \tag{1}$$

Положим, что в неоднородной среде $n = n_1(x, y)$ фронт распространяющейся волны представляется семейством

$$S_1(x, y) = \text{const}. \tag{2}$$

Очевидно, что линии равной фазы, т. е. линии, определяющие фронт волны, останутся теми же, если семейство их написать в виде уравнения:

$$S_2(S_1(x, y)) = \text{const}, \tag{3}$$

поскольку из (3) неизбежно вытекает (2). Здесь S_2 — произвольная функция от $S_1(x, y)$.

Подставляя (3) в (1), получим:

$$S_2'(S_1(x, y)) \sqrt{\left(\frac{\partial S_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S_1}{\partial y}\right)^2} = n(x, y). \tag{4}$$

где штрихована производная по аргументу S_1.

Используя теперь (1) и обозначая $S_2'(S_1(x, y))$ через $S(S_1(x, y))$, где S — произвольная функция, приведем (4) к виду:

$$n(x, y) = n_1(x, y)\, S(S_1(x, y)). \tag{5}$$

Мы образовали общее решение уравнения (1), зная одно частное решение $n = n_1(x, y)$. На основании изложенного можно сформулировать следующий принцип:

Если известна неоднородная среда $n_1(x, y)$, в которой фронт распространяющейся волны определяется семейством $S_1(x, y) = \text{const}$, то в любой другой среде $n(x, y) = n_1(x, y)\, S(S_1(x, y))$ фронт волны определяется тем же семейством функций.

Иными словами, если нам известна неоднородная среда $n_1(x, y)$, в которой лучи распространяются по определенным траекториям, то при помощи уравнения (5) можно сразу определять все возможные среды, в которых лучи будут распространяться по тем же траекториям.

В качестве следствия этого принципа мы можем утверждать, что:

Если известно общее решение обратной задачи геометрической оптики, т. е. известны все неоднородные среды $n(x, y) = n_1(x, y) S(S_1(x, y))$, в которых лучи распространяются по одинаковым траекториям, то аргумент произвольной функции S определяет фронт волны, распространяющейся в этих средах, именно: фронт волны представляется семейством $S_1(x, y) = \mathrm{const}$.

Таким образом, пользуясь сформулированным выше принципом, можно просто образовать общее решение, если известно хотя бы одно частное решение. Пусть, например, в диске единичного радиуса из диэлектрика показатель преломления меняется по закону $n_1 = \frac{2}{1+r^2}$, где r — расстояние от центра диска. Тогда лучи, исходящие из точки, находящейся на контуре диска, будут собираться в диаметрально противоположную точку (система, рассчитанная Максвеллом). В биполярной системе координат ξ, η (к которой мы перейдем ради простоты выкладок) это частное решение запишется в виде $n_1(\xi, \eta) = \frac{\operatorname{ch}\xi - \cos\eta}{\operatorname{ch}\xi}$.

Можно легко показать, что траектории лучей, распространяющихся в такой среде, совпадают с координатными линиями $\eta = \mathrm{const}$, а фронт волны, следовательно, представляется семейством $S_1 = \xi = \mathrm{const}$. Найдем теперь общее решение, т. е. определим все возможные законы изменения параметров неоднородных сред, в которых лучи распространяются по тем же траекториям. Пользуясь сформулированным выше принципом, можем утверждать, что общее решение имеет вид

$$n(\xi, \eta) = \frac{\operatorname{ch}\xi - \cos\eta}{\operatorname{ch}\xi} S(\xi),$$

т. е. все возможные неоднородные среды, в которых лучи распространяются по траекториям $\eta = \mathrm{const}$, содержатся в этом решении.

Если поставить задачу нахождения параметров неоднородных сред, обладающих фокусирующими свойствами, независимо от траекторий лучей, то можно довольно просто образовать частное решение, воспользовавшись следующим обстоятельством.

Если фазовая скорость v зависит только от x, причем $v(x) = -v(-x)$, то источник, расположенный в точке $-x_0$, идеально отображается в точке $+x_0$, т. е. траектории лучей будут симметричными относительно оси ординат $x = 0$. В этом легко убедиться, если обратиться к уравнению Эйлера. Последнее при $v = v_1(x)$ легко интегрируется, и мы получим уравнение траекторий лучей, испускаемых источником, расположенным в точке $-x_0$, в виде:

$$y(x, z) = \int_{-x_0}^{x} \frac{v_1(x)}{\sqrt{c_1^2(z) - v_1^2(x)}} dx. \tag{6}$$

Лучи будут, очевидно, собираться в точку $x = +x_0$, если

$$y(x_0, z) = \int_{-x_0}^{+x} \frac{v_1(x)}{\sqrt{c_1^2(z) - v_1^2(x)}} dx = 0. \tag{7}$$

Это последнее соотношение выполняется при $v_1(x) = -v_1(-x)$.

Для того чтобы лучи были параллельны при пересечении прямой $x = 0$, очевидно, необходимо наложить на $v_1(x)$ дополнительное условие, именно, потребовать, чтобы эта функция была непрерывна при $x=0$. Поэтому в качестве частного решения $v_1(x)$ (для фокусирующих сред) можно взять любую функцию, удовлетворяющую указанным двум условиям (например: $x, \sin x, \operatorname{sh} x$ и т. д.). Если мы выбрали $v_1(x)$, то из (7) сможем найти уравнение траекторий лучей, а затем и уравнение фронта волны из соотношения

$$S_1(x, y) = \int_{-x_0}^{x} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{v_1(x)}\, dx = \text{const}, \tag{8}$$

которое необходимо для образования общего решения по формуле (5). Окончательно это решение напишется в виде:

$$v(x, y) = v_1(x)\, S\left(\int_{-x_0}^{x} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{v_1(x)}\, dx\right). \tag{9}$$

В предыдущей работе [1] мы показали, что обратная задача геометрической оптики, т. е. задача нахождения законов изменения свойств неоднородных сред по заданным траекториям лучей, сводится к решению уравнения Эйлера, написанного в таком виде:

$$\frac{y''}{1+y'} - y'\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial x}\bigg|_{y=y(x,z)} + \frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial y}\bigg|_{y=y(x,z)} = 0, \tag{10}$$

где $v(x, y)$ — фазовая скорость, а $y(x, z)$ — уравнение траекторий лучей. Уравнение (10) было сведено затем к системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений. На целом ряде испробованных примеров мы убедились, однако, что общее решение указанной системы уравнений, как правило, получить невозможно вследствие математических трудностей.

В настоящей заметке мы покажем, что задачу построения неоднородных сред, в которых лучи распространяются по траекториям, задаваемым заранее, произвольным способом, можно для довольно широкого класса уравнений траекторий лучей свести к вычислению интегралов, которое значительно упрощается использованием изложенного принципа.

Как уже указывалось [1], значения функции $v(x, y)$ и ее производных должны быть взяты вдоль траекторий лучей; мы написали поэтому уравнение Эйлера в виде (10). Можно, однако, с таким же правом брать в уравнении Эйлера значения y' и y'' в тех точках, где вычисляется $v(x, y)$. Тогда вместо (10) получим уравнение

$$f(x, y) - \varphi(x, y)\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial y} = 0, \tag{11}$$

где

$$f(x, y) = \frac{y''}{1+y'^2}\bigg|_{z=z(x,y)}, \quad \varphi(x, y) = y'\bigg|_{z=z(x,y)};$$

$z = z(x, y)$ — уравнение траекторий, разрешенное относительно z.

Уравнение (2) сводится к системе вида

$$\frac{1}{v}\frac{dv}{f(x, y)} = \frac{dx}{\varphi(x, y)} = -\frac{dy}{1}. \tag{12}$$

Покажем теперь, что если уравнение траекторий лучей выражается в виде $\psi_1(y) = \psi_2(z)\,\psi_3(x)$, где через ψ обозначены произвольные функции, то решение системы (12) чрезвычайно просто. Действительно, в этом случае, как легко видеть, функция $\varphi(x, y)$ выражается в виде произведения двух функций и равна

$$\varphi(x, y) = \frac{\psi_1(y)}{d\psi_1/dy} \frac{\partial\psi_3/dx}{\psi_3(x)}.$$

Поэтому уравнение $\frac{dx}{\varphi(x, y)} = -dy$ допускает разделение переменных и, следовательно, легко интегрируется, именно:

$$\int \frac{\psi_3(x)}{d\psi_3/dx} dx = -\int \frac{\psi_1(y)}{d\psi_1/dy} + C_1. \tag{13}$$

Вычисляя оба интеграла и обозначая их сумму через $S_1(x, y)$, запишем первое решение системы в виде:

$$S_1(x, y) = C_1. \tag{14}$$

Определив отсюда значение $x = F(y, C_1)$ и подставив его в известную функцию $f(x, y)$, найдем второй интеграл системы (12):

$$\ln v(x, y) = \left| -\int f[y, F(y, C_1)]\, dy \right|_{C_1 = S_1(x, y)} + C_2. \tag{15}$$

Общее решение напишется в виде $w(C_1, C_2) = 0$. Разрешая его относительно $v(x, y)$, получим окончательно:

$$\ln v(x, y) = \left| -\int f[y, F(y, C_1)]\, dy \right|_{C_1 = S_1(x, y)} + S(S_1(x, y)), \tag{16}$$

где S — произвольная функция. Таким образом, задача сведена к вычислению интеграла.

Можно, однако, обойтись и без вычисления интеграла в уравнении (16), которое, как мы убедились на примерах, в подавляющем большинстве случаев очень сложно. Действительно, из изложенного легко подметить, что первое решение системы (12), которое мы написали в виде (14), является аргументом произвольной функции S, входящей в общее решение (16). Пользуясь следствием изложенного принципа, мы можем утверждать, что первое решение определяет фронт волны и написать последний в виде $S_1(x, y) = \text{const}$. Подставляя эту функцию в уравнение для эйконала, мы сразу получим частное решение в виде:

$$v_1(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial S_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S_1}{\partial y}\right)^2}}. \tag{17}$$

Тогда общее решение (16) напишется таким образом:

$$v(x, y) = v_1(x, y)\, S(S_1(x, y)), \tag{18}$$

где S — снова произвольная функция.

Таким образом, для указанного класса кривых обратная задача геометрической оптики, т. е. задача построения неоднородных сред по заданным траекториям лучей, решается весьма просто при помощи изложенного принципа.

Автор приносит глубокую благодарность чл.-корр. АН СССР А. А. Пистолькорсу за ценные советы и замечания.

Поступило
2 VI 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Л. Микаэлян, ДАН, 83, № 2 (1952).