Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXVI, № 5

МАТЕМАТИКА

Л. Ш. ХОДЖАЕВ

ОБОБЩЕННЫЙ НЬЮТОНОВ ПОТЕНЦИАЛ НЕОГРАНИЧЕННОЙ МАССЫ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 18 VIII 1952)

В связи с решением задачи Коши для линейного уравнения нормального гиперболического типа с переменными коэффициентами С. Л. Соболевым ([1,2]) впервые была предложена формальная теория линейных дифференциальных уравнений в частных производных в функциональном пространстве. Аппарат линейных уравнений С. Л. Соболевым был применен к решению задачи Коши для волнового уравнения в функциональном пространстве, а также к теории почти периодичности решения волнового уравнения ([3]). В настоящей работе этот аппарат применяется к решению уравнения Пуассона в функциональном пространстве.

Обозначим S_l пространство вещественных функций $\psi(x_1, \ldots, x_n)$, определенных во всем евклидовом пространстве R_n, непрерывных со своими производными до порядка l и обращающихся тождественно в нуль каждая вне своей соответствующей ограниченной области V_ψ пространства R_n.

Вводим понятие сходимости в S_l. Говорят, что последовательность функций $\psi_k \in S_l$ сходится к $\psi \in S_l$, если существует ограниченная область V_ψ, содержащая все V_{ψ_k} внутри себя, и если функции ψ_k со своими производными до порядка l сходятся равномерно к ψ и к ее соответствующим производным.

Пусть S_l^* — пространства линейных функционалов в S_l.

Некоторые функционалы в S_l^* могут иметь интегральное представление

$$(\rho, \psi) = \int \cdots \int \rho(p)\, \psi(p)\, dp, \tag{1}$$

где $\rho(p)$ — суммируемая функция в каждой ограниченной области пространства R_n. Эти функции отождествим с функцией $\rho(p)$. В каждом пространстве S_l^* функционалы, эквивалентные функциям, имеющим непрерывные производные всех порядков, всюду плотны в S_l^* (теорема С. Л. Соболева ([2]) о приближении функционалов в S_l^*).

Простейшими элементами S_l^* являются функционалы δ^Q, $\partial\delta^Q / \partial x_s$ и т. д. (δ — функция Дирака ([4])), определенные равенствами

$$(\delta^Q, \psi) = \psi(Q), \quad \left(\frac{\partial \delta^Q}{\partial x_s}, \psi\right) = -\left.\frac{\partial \psi}{\partial x_s}\right|_{p=Q}, \ldots \quad \text{для всех} \quad \psi \in S_l, \tag{2}$$

где Q — некоторая фиксированная точка в R_n.

Функционал $\rho \in S_l^*$ будем называть стремящимся к нулю на бесконечности, если

$$\lim_{\mathbf{Q} \to \infty} (\rho, \psi_{\mathbf{Q}}) = 0 \quad \text{для всех} \quad \psi \in S_l, \tag{3}$$

где $\mathbf{Q}$ — некоторый вектор, а $\psi_{\mathbf{Q}} = \psi(\mathbf{p} - \mathbf{Q})$.

Всякий функционал $u \in S_l^*$, удовлетворяющий равенству

$$(u, \Delta\psi) = (2 - n)\,\sigma_n(\rho, \psi) \quad \text{при всех} \quad \psi \in S_l, \tag{4}$$

где $n \neq 2$, $\Delta \equiv \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$, $\sigma_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$ и ρ — любой функционал из S_l^*, будем называть решением уравнения Пуассона

$$\Delta u = (2 - n)\,\sigma_n \rho \tag{5}$$

в S_l^*.

Мы будем рассматривать такие решения уравнения Пуассона (5), которые стремятся к нулю на бесконечности, т. е. $\lim_{\mathbf{Q} \to \infty} (u, \psi_{\mathbf{Q}}) = 0$ для всех $\psi \in S_l$.

Решение уравнения Пуассона (5) в S_l^*, стремящееся к нулю на бесконечности, единственно.

Решение уравнения (5) сводится к построению линейного обратного оператора, с точностью до постоянного множителя $(2 - n)\,\sigma_n$, к оператору Лапласа Δ, определенного на некотором множестве функционалов из S_l^*. Этот оператор можно построить, пользуясь тождеством Грина

$$\int_{\Omega} \cdots \int r^{2-n} \Delta u \, d\Omega = \overbrace{\int_S \cdots \int}^{n-1} \left(u \frac{\partial r^{2-n}}{\partial n} - r^{2-n} \frac{\partial u}{\partial n}\right) ds + (2 - n)\,\sigma_n u(p), \tag{6}$$

где r — евклидово расстояние между точками $p = (x_1, \ldots, x_n)$ и $p_1 = (x_1', \ldots, x_n')$. Предположим, что, кроме самой функции u, производные первого порядка от u также стремятся к нулю на бесконечности, будучи помножены на r. Тогда, взяв за область Ω шар радиуса $R_1 = \sqrt{x_1'^2 + \ldots + x_n'^2}$ с центром в начале координат и устремляя радиус шара к бесконечности, мы получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int r^{2-n} \Delta u(p_1)\, dp_1 = (2 - n)\,\sigma_n u(p). \tag{7}$$

Обозначая этот оператор через P, мы можем (7) записать в виде

$$P\Delta u = (2 - n)\,\sigma_n u. \tag{8}$$

Оператор P определяется, например, на линейном многообразии функционалов $\rho \in S_l^*$, эквивалентных функциям $\rho(p)$, удовлетворяющим неравенствам

$$\begin{aligned} |\rho(p)| &< \frac{A}{R^{n-1+\alpha}}, \quad \text{если} \quad R \geqslant 1; \\ |\rho(p)| &< A, \quad \text{если} \quad R < 1, \end{aligned} \tag{9}$$

где A — некоторое постоянное, $0 < \alpha < 1$ и $R = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_m^2}$.

Рассмотрим функциональное пространство L_l функций $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, определенных во всем R_n, непрерывных со своими производными до порядка l, стремящихся к нулю на бесконечности не менее быстро, чем $1/R^{n-2}$, и гармонических каждая вне своей соответствующей ограниченной области V_φ пространства R_n.

Определим понятие сходимости в L_l. Последовательность функций $\varphi_k \in L_l$ будем называть сходящейся к функции $\varphi \in L_l$, если: 1) существует ограниченная область V_φ, вне которой все φ_k являются гармоническими и 2) если функции φ_k со своими производными до порядка l сходятся равномерно к функции φ и ее соответствующим производным в каждой ограниченной области пространста R_n.

Множество линейных функционалов в L_l обозначим через L_l^*. Очевидно, что L_l шире, чем S_l, а L_l^* уже, чем S_l^*. Эти L_l являются линейными множествами в S_l^*.

Оператор P является линейным оператором, преобразующим непрерывным образом каждое множество S_{l_1} в подмножество множества L_{l_1+1}.

Оператор P^*, сопряженный с P, определяется на линейном многообразии всех функционалов $\rho \in S_l^*$, удовлетворяющих неравенствам

$$\begin{aligned} |(\rho, \psi_{\mathbf{Q}})| &< \frac{A(\psi)}{|\mathbf{Q}|^{n-1+\alpha}}, \quad \text{если } |\mathbf{Q}| \geqslant 1; \\ |(\rho, \psi_{\mathbf{Q}})| &< A(\psi), \quad \text{если } |\mathbf{Q}| < 1, \end{aligned} \tag{10}$$

для всех $\psi \in S_l$, где $A(\psi)$ — некоторое постоянное число, зависящее от функции ψ, $|\mathbf{Q}|$ — длина вектора $\mathbf{Q}$.

Оператор P^* является линейным оператором, преобразующим каждое подмножество $L_{l_1}^*$ множества $S_{l_1}^*$ функционалов, удовлетворяющих неравенствам

$$\begin{aligned} |(\rho, \varphi_{\mathbf{Q}})| &< \frac{A(\varphi)}{|\mathbf{Q}|^{n-1+\alpha}}, \quad \text{если} \quad |\mathbf{Q}| \geqslant 1; \\ |(\rho, \varphi_{\mathbf{Q}})| &< A(\varphi), \quad \text{если} \quad |\mathbf{Q}| < 1, \end{aligned} \tag{11}$$

для всех $\varphi \in L_{l_1}$, в другое подмножество множества $S_{l_1-1}^*$ функционалов, стремящихся к нулю на бесконечности.

Для оператора P^* имеет место следующая фундаментальная формула:

$$\Delta P^* \rho = (2 - n)\, \sigma_n \rho. \tag{12}$$

На линейных многообразиях функционалов из S_l^* и L_l^*, эквивалентных функциям, удовлетворяющим неравенствам (9) и имеющим непрерывные производные всех порядков, т. е. на множестве функционалов всюду плотном в S_l^* и L_l^*, операторы P^* и P совпадают, откуда при помощи предельного перехода получим

$$P^*\Delta u = (2-n)\,\sigma_n u \tag{13}$$

для всех наших функционалов.

Итак, существует линейный оператор P, являющийся одновременно правым и левым обратным оператором с точностью до постоянного множителя $(2-n)\,\sigma_n$ к оператору Лапласа Δ, определенный на линейных многообразиях всех функционалов из S_l^* и L_l^*, удовлетворяющих, соответственно, неравенствам (10) и (11), откуда следует единственное определенное решение

$$u = P\rho \tag{14}$$

уравнения Пуассона (5).

Функционал u, выраженный формулой (14), будем называть обобщенным ньютоновым потенциалом ноограниченной массы плотности ρ. Этот обобщенный потенциал определяется по формуле

$$(u, \psi) = (\rho, P\psi) \quad \text{для всех } \psi \in S_l. \tag{15}$$

Классическое решение уравнения Пуассона в неограниченной среде существует лишь в том случае, если функционал u эквивалентен функции, имеющей непрерывные производные до 2-го порядка. Для этого достаточно, чтобы функционал ρ был эквивалентен функции, имеющей непрерывные производные первого порядка и удовлетворяющей неравенствам (9).

Рассмотрим некоторые простейшие примеры.

1. $\rho \sim \lambda(R) \sin \mu(R)$, где $R = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$, а функции $\lambda(R)$ и $\mu(R)$ — непрерывные функции в $[0, \infty]$, причем $\mu(R)$ стремится к нулю на бесконечности гораздо быстрее, чем $\lambda(R)$, а $\mu'(R) \neq 0$ при $R = 0$. Например, положим $\lambda(R) = e^{kR^2}$ и $\mu(R) = R + e^{2kR^2}$, где $k > 0$ — любое постоянное число. При этом уравнение Пуассона (5) будет иметь единственное определенное решение в S_l^*, определяемой равенством (15).

Заметим, что этот функционал не будет элементом пространства функционалов над быстро убывающими функциями. Так как обобщенное преобразование Фурье, развитое Л. Шварцем ([5]), имеет смысл только в пространстве функционалов над быстро убывающими функциями, то соответствующее решение уравнения Пуассона (5) при заданном функционале не может быть определено методом преобразования Фурье.

2. $\rho = \delta^Q$. Тогда $u \sim r_{pQ}^{2-n}$, где $r_{pQ} = |\mathbf{p} - \mathbf{Q}|$.

3. $\rho = \dfrac{\partial \delta^Q}{\partial x_s}$. Тогда $u \sim \left.\dfrac{\partial r_{pp_1}^{2-n}}{\partial x_s}\right|_{p=Q}$, где $r_{pp_1} = |\mathbf{p} - \mathbf{p}_1|$.

Институт сейсмологии
Академии наук Таджикской ССР

Поступило
8 VII 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Соболев, ДАН, 3, № 1 (1935). [2] С. Соболев, Матем. сборн., 1, в. 1 (1936). [3] С. Л. Соболев, ДАН, 49, № 1 (1945). [4] P. A. M. Dirac. The Principles of Quantum Mechanics, Oxford, 1947. [5] L. Schwartz, Théorie des Distributions, Paris, 1951.