Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXVI, № 5

МАТЕМАТИКА

К. А. РОДОССКИЙ

О НЕКОТОРЫХ ОЦЕНКАХ ВЕЛИЧИН $L(1, \chi)$

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 16 VIII 1952)

В этой заметке приводятся три теоремы, относящиеся к оценке величин $L(1, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) n^{-1}$, χ — неглавный характер по модулю D*.

Ниже $C, C_1, C_2, \ldots$ обозначают, в каждой теореме свои, абсолютные положительные постоянные.

Теорема 1. *Пусть D — достаточно большое натуральное число, $\eta \in [4 \ln\ln D \cdot (\ln D)^{-1};\ 0{,}1]$.*

Тогда число тех характеров по модулю D, для которых $|L(1, \chi)|^{\pm 1} > C_1 \eta^{-1} \ln\ln D$, будет меньше $C_2 \ln^8 D \cdot D^{8\eta}$.

Доказательство. Из теоремы, доказанной в работе (2), непосредственно следует, что число L-функций с характерами по модулю D, имеющих нули в прямоугольнике $R(1-\eta \leqslant \sigma \leqslant 1;\ |t| \leqslant D^{\eta})$ не может быть больше, чем $C_2 \ln^8 D \cdot D^{8\eta}$. Остается показать, что для остальных L-функций (не имеющих нулей в R) имеем $|L(1, \chi)|^{\pm 1} \leqslant C_1 \eta^{-1} \ln\ln D$. Для этого, используя формулу

$$\sum_{n \leqslant x} \chi(n) \Lambda(n) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{a-iT}^{a+iT} \frac{L'}{L}(s, \chi) \frac{x^s}{s} ds + R_T(x),$$

где $a = 1 + \ln^{-1} x$, $x \geqslant 3$, $T \geqslant 1$, $|R_T(x)| \leqslant C_3 \left(\frac{x}{T} \ln Dx + \ln x\right)$, и отсутствие нулей $L(s, \chi)$ в прямоугольнике R, легко находим

$$\left| \sum_{n \leqslant x} \chi(n) \Lambda(n) \right| < C_4 (\ln^3 D \cdot x^{1-\eta+\ln^{-1} D} + (\ln^2 D + \ln^2 x) D^{-\eta} + \ln x).$$

Пользуясь этой оценкой при $x \in [x_0, x_1]$, где

$$\ln x_0 = 4\eta^{-1} \ln\ln D, \quad \ln x_1 = 6D^{-\eta/4},$$

и тривиальной оценкой при других x, получим

$$|\ln L(\sigma_0, \chi)| \leqslant \int_{\sigma_0}^{\infty} \xi \int_{2}^{\infty} \left| \sum_{n \leqslant x} \chi(n) \Lambda(n) \right| x^{-\xi-1} dx\, d\xi \leqslant \ln\ln x_0 + C_4$$

при $\sigma_0 = 1 + (\ln D)^{-4}$.

---

* Относительно имеющихся гипотез о поведении величины $L(1, \chi)$ при $D \to \infty$ см. (1).

Отсюда непосредственно следует теорема.

Обозначим в дальнейшем символами $\chi_D^{(2)}$ первообразный действительный характер по модулю D, $\chi_d^{(4)}$ — первообразный биквадратический характер по модулю d и т. д.

Теорема 2.

$$\left.\begin{array}{l} L(1, \chi_D^{(2)})\cdot L(1, \chi_{dD}^{(2)}) \\ \left|L(1, \chi_d^{(4)}\chi_D^{(2)})\right|^2 \end{array}\right\} \leqslant C_1 \ln dD \cdot \ln d.$$

Доказательство. Рассмотрим пару первообразных характеров χ и χ_1 с соответствующими основными модулями D и D_1.

В двух следующих случаях:

1) $\chi = \chi_D^{(2)}, \quad \chi_1 = \chi_{dD}^{(2)}$;

2) $\chi = \chi_d^{(4)}\chi_D^{(2)}, \quad \chi_1 = \overline{\chi}$

легко показать, что

$$\Phi(s) = \zeta(s) L(s, \overline{\chi}\chi_1) - L(s, \chi) L(s, \chi_1) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s},$$

причем $a_n \geqslant 0$.

Образуем целую функцию $\Phi(s) - \frac{L(1, \overline{\chi}\chi_1)}{s-1}$ (см. ([3])) и разложим в степенной ряд:

$$\Phi(s) - \frac{L(1, \overline{\chi}\chi_1)}{s-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (b_n - L(1, \overline{\chi}\chi_1))(2-s)^n \quad \text{с} \quad b_n \geqslant 0.$$

Так же, как и в работе Эстермана ([3]), получим $(s > 0)$

$$\Phi(s) - \frac{L(1, \overline{\chi}\chi_1)}{s-1} \geqslant -L(1, \overline{\chi}\chi_1)\frac{(2-s)^z - 1}{1-s}$$

при $z = C_2 \ln DD_1$.

Переходя к пределу при $s \to 1$, получим

$$L(1, \chi) L(1, \chi_1) \leqslant C_4 \ln DD_1 \cdot L(1, \overline{\chi}\chi_1) + L'(1, \overline{\chi}\chi_1),$$

а это и требуется доказать.

Заметим, что, используя неравенство

$$n^2 - 1 - n^2 \cos\varphi + \cos n\varphi \geqslant 0$$

(n целое), можно получить такого же типа оценки, но более слабые, для характеров других степеней. Вывод таких оценок основывается на рассмотрении линейных комбинаций L-рядов. Кроме того, теорема 2 может быть обобщена и на произведения более двух $L(1, \chi)$.

Теорема 3. *Пусть* $3 \leqslant d < D^{\frac{1}{\ln\ln D}}$; $(d, D) = 1$. *Тогда*

$$L(1, \chi_D^{(2)}) + L(1, \chi_{dD}^{(2)}) > \frac{C}{\ln D}.$$

Доказательство. Исходя из тождества

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{\chi(n)}{n} \sum_{k \leqslant \frac{m}{n}} \frac{1}{k} = \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n} \sum_{a/n} \chi(a),$$

после несложных преобразований получаем

$$L(1, \chi_D^{(2)}) = \sum_{D^{C_1} \leqslant n \leqslant eD^{C_1}} \frac{1}{n} \sum_{a/n} \chi_D^{(2)}(a) + o(D^{-1/2}).$$

Складывая это тождество с подобным для $L(1, \chi_{dD}^{(2)})$, получим:

$$L(1, \chi_D^{(2)}) + L(1, \chi_{dD}^{(2)}) > \sum_{D^{C_1} \leqslant n \leqslant eD^{C_1}} \frac{1}{n} \sum_{a/n} \chi_D^{(2)}(a)(1 + \chi_d^{(2)}(a)) - \frac{C_2}{\sqrt{D}} \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{D^{C_1} \leqslant p \leqslant eD^{C_1},\ \chi_d^{(2)}(p) = -1} \frac{1}{p} [\chi_D^{(2)}(p)(1 + \chi_d^{(2)}(p)) + 2] - \frac{C_2}{\sqrt{D}} \geqslant$$

$$\geqslant 2 \sum_{D^{C_1} \leqslant p \leqslant eD^{C_1},\ \chi_d^{(2)}(p) = -1} \frac{1}{p} - \frac{C_2}{\sqrt{D}} > \frac{C}{\ln D}$$

при надлежащем выборе постоянной C_1.

Поступило
13 VIII 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ю. В. Линник, А. А. Реньи, Изв. АН СССР, сер. матем., № 11 (1947). [2] К. А. Родосский, Укр. матем. журн., 3, 4 (1951). [3] T. Estermann, J. London Math. Soc., 23, № 92 (1948).