

С. Д. БЕРМАН

К ТЕОРИИ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

(Представлено академиком О. Ю. Шмидтом 9 VIII 1952)

Известно, что число неприводимых над алгебраически замкнутым полем P представлений конечной группы G равно числу классов сопряженных элементов G , если порядок группы и степени этих представлений не делятся на характеристику поля.

В настоящей заметке решается вопрос о числе неприводимых представлений конечной группы над произвольным полем K , характеристика которого не делит порядка группы и степеней ее абсолютно неприводимых представлений.

Пусть G — конечная группа порядка h ; K — поле, удовлетворяющее указанным выше ограничениям. Обозначим через $R(G, K)$ групповое кольцо группы G над K .

$R(G, K)$ разлагаются в прямую сумму минимальных двухсторонних идеалов:

$$R(G, K) = I_1 + \dots + I_s. \quad (1)$$

Каждый идеал I_j ($j = 1, \dots, s$) порождается идемпотентным элементом центра e_j . Число неприводимых представлений G в поле K равно числу слагаемых в разложении (1).

Дополним K до алгебраически замкнутого поля \bar{K} и образуем кольцо $R(G, \bar{K})$. Очевидно, $R(G, K) \subseteq R(G, \bar{K})$. Имеет место разложение:

$$R(G, \bar{K}) = \bar{I}_1 + \dots + \bar{I}_t, \quad (2)$$

где \bar{I}_j ($j = 1, \dots, t$) изоморфен полному матричному кольцу порядка n_j над \bar{K} и порождается идемпотентом центра \bar{e}_j .

Каждый идемпотент e_i ($i = 1, \dots, s$) однозначно представляется в виде суммы некоторых из идемпотентов e_j :

$$e_i = \sum_{k=1}^{r_i} \bar{e}_k^{(i)} \quad (i = 1, \dots, s); \quad \sum_{i=1}^s r_i = t. \quad (3)$$

Пусть C_1, \dots, C_t — классы сопряженных элементов группы G ; h_i — число элементов класса C_i ; k_i — сумма элементов класса C_i в $R(G, K)$; n — наименьшее общее кратное порядков элементов G ; ϵ — первообразный корень степени n из 1. Идемпотенты \bar{e}_j ($j = 1, \dots, t$) принадлежат кольцу $R(G, K(\epsilon))$ и определяют характеры $\chi_j(g)$ ($g \in G$)

Имеют место соотношения:

$$k_i = h_i \sum_{m=1}^t \frac{\chi_m(g_i)}{n_m} \bar{e}_m, \quad (4)$$

$$\bar{e}_i = \frac{n_i}{h} \sum_{m=1}^t \chi_i(g_m^{-1}) k_m \quad (1).$$

Здесь g_1, \dots, g_t образуют систему представителей классов C_1, \dots, C_t .

Обозначим через Γ группу Галуа поля $K(\mathfrak{e})$. Каждый автоморфизм $\varphi \in \Gamma$ задается формулой

$$\varphi(\mathfrak{e}) = \mathfrak{e}^\nu, \quad (\nu, h) = 1; \quad (5)$$

назовем ν индексом φ .

Будем говорить, что идемпотент \bar{e}_j K -сопряжен с идемпотентом \bar{e}_i , если

$$\bar{e}_j = \varphi(\bar{e}_i) = \frac{n_i}{h} \sum_{m=1}^t \varphi[\chi_i(g_m^{-1})] k_m. \quad (6)$$

Соотношение K -сопряженности идемпотентов \bar{e}_i рефлексивно, симметрично и транзитивно. Значит, множество $E = \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_t\}$ распадается на пересекающиеся подмножества E_1, \dots, E_p K -сопряженных между собой идемпотентов. K -сопряженные идемпотенты \bar{e}_i и \bar{e}_j определяют K -сопряженные характеры $\chi_i(g)$ и $\chi_j(g)$. Подмножествам E_1, \dots, E_p соответствуют системы характеров X_1, \dots, X_p , которые мы назовем K -отделами характеров.

Если $\varphi \in \Gamma$ задается формулой (5), то

$$\varphi[\chi_i(g)] = \chi_i(g^\nu). \quad (7)$$

Пусть $\bar{e}_i = \frac{n_i}{h} \sum_{m=1}^t \chi_i(g_m^{-1}) k_m \in E_j$, $K_j = K(\chi_i(g_1^{-1}), \dots, \chi_i(g_t^{-1}))$;

ψ_1, \dots, ψ_r — автоморфизмы группы Галуа Γ_j поля K_j . Тогда все идемпотенты $\bar{e}_m \in E_j$ представляются в виде $\psi_1(\bar{e}_i), \dots, \psi_r(\bar{e}_i)$.

Этот факт является следствием нормальности поля K_j и возможности продолжения любого автоморфизма K_j до автоморфизма поля $K(\mathfrak{e})$.

Сумму идемпотентов множества E_i обозначим через \tilde{e}_i ($i = 1, \dots, p$). Очевидно,

$$\tilde{e}_i \in R(G, K) \quad (i = 1, \dots, p). \quad (8)$$

В самом деле, $\tilde{e}_i = V_1^{(i)} k_1 + \dots + V_t^{(i)} k_t$, причем коэффициенты $V_1^{(i)}, \dots, V_t^{(i)}$ выдерживают действие всех автоморфизмов группы Γ_i ($i = 1, \dots, p$).

В силу (8), каждый идемпотент e_i ($i = 1, \dots, p$) может получиться только в результате дальнейшего разложения в $R(G, K)$ одного из идемпотентов \tilde{e}_j ($j = 1, \dots, p$) в сумму ортогональных минимальных идемпотентов центра. Значит, в правую часть (3) входят только K -сопряженные идемпотенты $\bar{e}_j^{(i)}$ ($j = 1, \dots, r$).

Пусть $a, b \in G$. Назовем элемент b K -сопряженным с a , если b сопряжен с a^ν , где ν — индекс некоторого автоморфизма $\varphi \in \Gamma$. Легко

показать, что соотношение K -сопряженности определяет разбиение группы G на непересекающиеся совокупности T_1, \dots, T_q K -сопряженных между собой элементов. Назовем подмножества T_1, \dots, T_q K -отделами группы. Каждый K -отдел состоит из нескольких классов. Сумму элементов отдела T_i в $R(G, K)$ обозначим через t_i ($i = 1, \dots, q$).

Лемма 1. Пусть идемпотенты $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_m$ K -сопряжены между собой. образуем сумму $e = \bar{e}_1 + \dots + \bar{e}_m = \Lambda_1 k_1 + \dots + \Lambda_t k_t$.

Если $e \in R(G, K)$, то для классов C_i и C_j , принадлежащих одному K -отделу группы, $\Lambda_i = \Lambda_j$.

Доказательство. Пусть $\bar{e}_1 = \gamma_1 k_1 + \dots + \gamma_t k_t$. Если k_i и k_j порождаются классами C_i и C_j , принадлежащими одному K -отделу, то, в силу (4) и (7), $\gamma_j = \varphi(\gamma_i)$, где $\varphi \in \Gamma$. Положим $\bar{e}_{ij} = \varphi_j(\bar{e}_{i1})$ ($j = 1, \dots, m, \varphi_j \in \Gamma$).

Тогда

$$\Lambda_i = \varphi_1(\gamma_i) + \dots + \varphi_m(\gamma_i),$$

$$\Lambda_j = \varphi_1 \varphi(\gamma_i) + \dots + \varphi_m \varphi(\gamma_i) = \varphi \Lambda_i = \Lambda_i,$$

так как, по предположению, $\Lambda_i \in K$.

Следствие. Число неприводимых в поле K представлений группы G (а значит, и число K -отделов характеров) не превосходит числа K -отделов группы.

В самом деле, каждый из идемпотентов e_i ($i = 1, \dots, s$) на основании леммы 1 представляется в виде линейной комбинации элементов t_j ($j = 1, \dots, q$).

Так как e_1, \dots, e_s линейно независимы над K , то $p \leq s \leq q$.

Лемма 2. Пусть C_{i_1}, \dots, C_{i_j} — все классы, принадлежащие K -отделу T_i -группы.

Если $t_{i'} = k_{i_1} + \dots + k_{i_j} = B_1 \bar{e}_1 + \dots + B_t \bar{e}_t$ и идемпотенты \bar{e}_i ($1 \leq i \leq t$) и $\bar{e}_{j'}$ ($1 \leq j' \leq t$) K -сопряжены, то $B_i = B_{j'}$.

Доказательство. В силу (4),

$$k_{i_1} = \gamma'_1 \bar{e}_1 + \dots + \gamma'_t \bar{e}_t = h_{i_1} \sum_{m=1}^t \frac{\chi_m(g_{i_1})}{n_m} \bar{e}_m.$$

Пусть Γ_i — группа Галуа поля $K(\chi_1(g_{i_1}), \dots, \chi_t(g_{i_1})); \Phi_1, \dots, \Phi_{r'}$ — ее автоморфизмы; φ_m — продолжение автоморфизма Φ_m до автоморфизма поля $K(s)$ ($m = 1, \dots, r'$). Легко видеть, что имеют место соотношения

$$r' = j, \quad k_{i\bar{p}} = \sum_{m=1}^t \frac{\Phi_{\bar{p}}[\chi_m(g_{i_1})]}{n_m} \bar{e}_m \quad (\bar{p} = 1, \dots, j). \quad (9)$$

Из (9) следует, что

$$B_{\bar{p}} = \Phi_1 \gamma_{\bar{p}} + \dots + \Phi_j \gamma_{\bar{p}} \quad (\bar{p} = 1, \dots, t). \quad (10)$$

Соотношение (10) показывает, что $B_{\bar{p}} \in K$ ($\bar{p} = 1, \dots, t$), так как $B_{\bar{p}}$ выдерживает действие всех автоморфизмов Φ_1, \dots, Φ_j .

Если $\varphi(s) = s^u$ и $\bar{e}_{j'} = \varphi(\bar{e}_i)$, то, на основании (4) и (6), $n_i = n_{j'}$ и $\chi_{j'}(g_{\bar{p}}^{-1}) = \chi_i(g_{\bar{p}}^u)$ ($\bar{p} = 1, \dots, t$). Значит, $\chi_{j'}(g_{i_1}) = \chi_i(g_{i_1}^u)$, откуда

$$\gamma'_{j'} = \varphi(\gamma_i). \quad (11)$$

Из (10) и (11) следует, что

$$B_j = \varphi_1 \varphi(\gamma'_i) + \dots + \varphi_j \varphi(\gamma'_i) = \varphi(B_i) = B_i,$$

так как, в силу предыдущих рассуждений, $B_i \in K$.

Следствие. Число K -отделов группы не больше числа K -отделов характеров.

Действительно, из леммы 2 вытекает, что каждый элемент t_i ($i = 1, \dots, q$) представляется в виде линейной комбинации идемпотентов e_i ($i = 1, \dots, p$).

Итак, $q \leq p$.

Теорема. Число неприводимых в поле K представлений группы G равно числу K -отделов группы и совпадает с числом K -отделов характеров.

Теорема является непосредственным следствием лемм 1 и 2.

Пусть D — поле действительных чисел; R — поле рациональных чисел. Тогда каждый D -отдел T -группы G состоит из элементов, сопряженных с a и a^{-1} , где a — произвольный элемент T ; в R -отдел входят элементы, сопряженные со всеми степенями a^h , $(h, p) = 1$ (a — любой элемент R -отдела).

Отсюда сразу получаются теоремы о числе неприводимых представлений конечной группы над полем действительных и полем рациональных чисел ⁽²⁾.

Отметим, что в ⁽³⁾ для числовых полей K доказана теорема о равенстве числа представлений, неприводимых над K , числу K -отделов характеров (мы употребляем нашу терминологию).

Выражаю благодарность чл.-корр. АН УССР Я. Б. Лопатинскому и доктору физико-математических наук И. Р. Шафаревичу за ряд ценных указаний.

Поступило
29 IV 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Б. Л. Ван дер Варден, Современная алгебра, ч. II, 1947. ² G. Frobenius, I. Schur, Berliner Ber., 186 (1906). ³ I. Schur, ibid., 164 (1906).