Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXVI, № 4

ТЕХНИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Г. З. ГЕРШУНИ

О СВОБОДНОЙ ТЕПЛОВОЙ КОНВЕКЦИИ В ПРОСТРАНСТВЕ МЕЖДУ ВЕРТИКАЛЬНЫМИ КОАКСИАЛЬНЫМИ ЦИЛИНДРАМИ

(Представлено академиком М. А. Леонтовичем 3 VII 1952)

Для ряда приложений важно исследовать характер конвекционного движения в жидкости между коаксиальными цилиндрами, нагретыми до различной температуры. Если общая ось цилиндров вертикальна и цилиндры достаточно длинны, то для удаленной от концов части легко найти точное решение уравнений конвекции.

1. Исходим из уравнений стационарной тепловой конвекции ([1]):

$$(\mathbf{v}\nabla)\,\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho_0}\nabla p + \nu\Delta\mathbf{v} - \beta\mathbf{g}T, \tag{1,1}$$

$$\mathbf{v}\Delta T = \chi\Delta T, \tag{1,2}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = 0. \tag{1,3}$$

Здесь $\mathbf{v}$ — гидродинамическая скорость; T — отсчитываемая от условного нуля температура; p — избыточное (над гидростатическим) давление; ρ_0 — средняя плотность жидкости; ν, χ, β — соответственно, коэффициенты кинетической вязкости, температуропроводности и теплового расширения; $\mathbf{g}$ — ускорение силы тяжести.

Граничные условия таковы: 1) скорость на поверхностях внутреннего (радиуса R_1) и внешнего (радиуса R_2) цилиндров обращается в нуль; 2) температура на поверхности внутреннего цилиндра есть T_0 (постоянная на всей поверхности); температура на поверхности внешнего цилиндра условно принимается за нуль (внутренний цилиндр теплее); 3) пространство между цилиндрами замкнуто, так что количество жидкости, протекающее в единицу времени через любое нормальное к оси сечение, равно нулю.

2. Удобно перейти к цилиндрическим координатам z, r, φ; соответственно: v_z, v_r, v_φ — составляющие вектора скорости; ось z направлена по общей оси цилиндров вертикально вверх.

Условия симметрии оправдывают следующие предположения: а) величины, входящие в уравнения (1), не зависят от φ; б) скорость везде параллельна оси цилиндров: $v_r = v_\varphi = 0$; в) температура не зависит от z: $T = T(r)$.

В этих предположениях уравнения значительно упрощаются. Из (1,3) следует, что v_z не зависит от z, т. е. $v_z = v(r)$. Проектируя (1,1) на оси r и φ, находим, что p зависит только от z. Проекция (1,1) на ось z и уравнение (1,2) имеют вид:

$$\frac{1}{\rho_0}\frac{dp}{dz} = \frac{\nu}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv}{dr}\right) + g\beta T, \tag{2,1}$$

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) = 0 \tag{2,2}$$

с граничными условиями

$$v(R_1) = v(R_2) = 0; \qquad T(R_1) = T_0, \quad T(R_2) = 0. \tag{3}$$

Заметим, что в уравнении (2,1) левая часть зависит только от z, а правая — только от r, т. е. обе части равны постоянной, которую обозначим $Ag\beta T_0$.

Перейдем к безразмерной форме, выбрав в качестве единиц измерения расстояни , скорости и температуры, соответственно R_1, χ / R_1 и T_0. Новые величины условимся обозначать теми же буквами, что и старые. Уравнения (2) и граничные условия (3) в безразмерной форме запишутся так:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv}{dr}\right) = C(A - T); \tag{4,1}$$

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) = 0; \tag{4,2}$$

$$v(1) = v(\rho) = 0; \quad T(1) = 1, \quad T(\rho) = 0. \tag{5}$$

Здесь $\rho = R_2 / R_1$, $C = g\beta T_0 R_1^3 / \nu\chi = \mathrm{Pr}\cdot\mathrm{Gr}$, где Pr и Gr — числа Прандтля и Грассхофа.

Интегрируя (4,2) при указанных граничных условиях, находим:

$$T = 1 - \frac{\ln r}{\ln \rho}, \tag{6}$$

т. е. распределение температуры такое же, как в случае неподвижной среды (что всегда имеет место, если скорость перпендикулярна градиенту температуры). Подставляя (6) в (4,1), интегрируя в указанных граничных условиях и определяя A из условия замкнутости, которое запишется так: $\int\limits_1^\rho vr\,dr = 0$, находим распределение скорости:

$$v = \frac{C}{4}\left[B_1(r^2 - 1) + \frac{\ln r}{\ln \rho}(r^2 + B_2)\right], \tag{7}$$

где $B_1 = \frac{1}{4}\frac{(\rho^2 - 1)(3\rho^2 - 1) - 4\rho^4 \ln \rho}{(\rho^4 - 1)\ln \rho - (\rho^2 - 1)^2}$, $B_2 = \frac{1}{4}\frac{\rho^4 - 1 - 4\rho^2 \ln \rho}{(\rho^2 + 1)\ln \rho - \rho^2 + 1}$.

3. Из полученного результата, в частности, следует, что в обсуждаемом случае перенос тепла от горячего цилиндра к холодному определяется только молекулярной теплопроводностью жидкости. Этот вывод находится в соответствии с опытом ([2]) в пределах значений $\mathrm{Gr}\cdot\mathrm{Pr} < 10^3$. При $\mathrm{Gr}\cdot\mathrm{Pr} > 10^3$ в эксперименте наблюдаются совершенно иные условия движения и теплообмена. Найденное решение (6) — (7) формально существует при любых значениях $\mathrm{Gr}\cdot\mathrm{Pr}$, но при $\mathrm{Gr}\cdot\mathrm{Pr} > 10^3$, повидимому, является неустойчивым — возникает турбулентный режим.

Молотовский государственный университет
им. А. М. Горького

Поступило
10 V 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. Ландау и Е. Лифшиц, Механика сплошных сред, 1944. [2] М. А. Михеев, Основы теплопередачи, 1949.