Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXVI, № 4

МАТЕМАТИКА

В. И. ШНЕЙДМЮЛЛЕР

АЛГЕБРЫ БЕСКОНЕЧНОГО РАНГА С УСЛОВИЕМ МИНИМАЛЬНОСТИ ДЛЯ ПОДАЛГЕБР

(Представлено академиком О. Ю. Шмидтом 4 VIII 1952)

§ 1. Алгебра A над основным полем P будет с условием минимальности для подалгебр, если любая убывающая цепочка подалгебр $A \supset A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots$, где каждая подалгебра рассматривается над полем P, обрывается после конечного числа шагов.

Несложно доказываются следующие утверждения:

1. *Всякий элемент x алгебры A с условием минимальности является алгебраическим, т. е. удовлетворяет уравнению с коэффициентами из основного поля P.*

2. *Если A удовлетворяет условию минимальности и равенству $A^2 = 0$, то A конечного ранга над P.*

3. *Алгебра с условием минимальности имеет нильпотентный радикал.*

4. *Радикал алгебры с условием минимальности имеет конечный ранг относительно P.*

Кольцо R называется полупримарным, если оно обладает радикалом, а кольцо вычетов $R/\mathfrak{N}$ полупростое, т. е. прямая сумма полных колец матриц над некоторыми телами. Из этого определения видно, что *алгебра с условием минимальности является частным случаем полупримарного кольца.*

Кольцо называется вполне примарным, если оно обладает единицей и кольцо вычетов его по радикалу является телом. Вполне примарное кольцо не содержит, кроме единицы, идемпотентных элементов.

Примарное кольцо обладает единицей, и кольцо вычетов его по радикалу является простым. Примарное кольцо является полным кольцом матриц над некоторым вполне примарным кольцом. Полупримарное кольцо является прямой суммой примарных колец и модуля из радикала [1].

Применим эти сведения к нашему случаю, когда полупримарное кольцо является алгеброй с условием минимальности.

Теорема 1. *Всякая вполне примарная алгебра A с условием минимальности, не являющаяся алгеброй с делением, имеет конечный ранг.*

Эта теорема доказывается аналогично теореме 6 из работы автора [2].

§ 2. Пусть алгебра A с условием минимальности представлена, как полупримарное кольцо, в виде прямой суммы

$$A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n + N,$$

где A_i — примарные кольца и N — модуль из радикала. Каждое A_i есть полное кольцо матриц над вполне примарной алгеброй. Если для данного A_i вполне примарная алгебра, над которой A_i является полным кольцом матриц, отлична от поля, то, по теореме 1, A_i имеет конечный ранг над P. A_i может иметь конечный ранг над P и в том случае, если A_i является алгеброй с делением конечного ранга или полным кольцом матриц над алгеброй с делением конечного ранга.

Если же A_i имеет бесконечный ранг, то A_i будет обязательно алгеброй с делением.

В самом деле, если A_i имеет бесконечный ранг и не является алгеброй с делением, то вполне примарная алгебра K, над которой A_i является полным кольцом матриц, будет иметь бесконечный ранг над P и поэтому будет алгеброй с делением. Заметим, что если K бесконечного ранга над P, хотя бы с условием минимальности, то полное кольцо матриц порядка n над ним, $n \geqslant 2$, уже условию минимальности не удовлетворяет.

Теорема 2. *Если $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n + N$, A_i — алгебра бесконечного ранга над P из этой суммы и e_i — ее единица, то $e_i n = n e_i = 0$, где $n \in N$.*

Следствие 1. *Если A_i — алгебра бесконечного ранга в разложении $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n + N$, то $A_i N = N A_i = 0$.*

Теорема и следствие доказываются аналогично теореме и следствию из § 6 работы автора [2].

Объединяя полученные результаты, мы можем сформулировать следующую основную теорему.

Основная теорема. *Алгебры с условием минимальности для подалгебр являются двусторонними прямыми суммами конечного числа неразложимых алгебр, каждая из которых будет или алгеброй бесконечного ранга с делением, или алгеброй конечного ранга.*

Этот результат мы дополним в двух направлениях.

§ 3. Рассмотрим вопрос о единственности разложения, которое было получено в основной теореме. В дальнейшем мы опираемся на некоторые результаты из теории структур, полученные А. Г. Курошем [3]. Полная структура S, т. е. структура, в которой сумма и произведение определены для любых подмножеств, называется вполне дедекиндовой, если для любых систем элементов X_α, Y_α, для которых $X_\alpha \leqslant Y_\beta$ при $\alpha \neq \beta$, справедливо равенство

$$\left(\sum_\alpha X_\alpha\right) \cdot \prod_\alpha Y_\alpha = \sum_\alpha X_\alpha Y_\alpha.$$

Структура двусторонних идеалов некоторого кольца и, в частности, P-идеалов алгебры, является вполне дедекиндовой, если под произведением двух элементов структуры понимать их пересечение, а под суммой двух элементов — идеал, порожденный элементами двух данных идеалов.

Элемент a вполне дедекиндовой структуры есть прямая сумма элементов

$$a_\alpha \quad (\alpha \in \mathfrak{M}),$$

$$a = \sum_{\alpha \in \mathfrak{M}} a_\alpha, \quad \text{если } a = \sum_{\alpha \in \mathfrak{M}} a_\alpha \text{ и } a_\alpha \sum_{\beta \neq \alpha} a_\beta = 0 \quad \text{для всех } \alpha \text{ из } \mathfrak{M}.$$

Если единица вполне дедекиндовой структуры двумя способами разложена в прямую сумму, $1 = \sum_\alpha a_\alpha = \sum_\beta b_\beta$, то центром этой пары разложений называют элемент $z = \prod\limits_{\alpha, \beta} (\overline{a}_\alpha + \overline{b}_\beta)$, где $\overline{a}_\alpha = \sum\limits_{\gamma \neq \alpha} a_\gamma$, $\overline{b}_\beta = \sum\limits_{\delta \neq \beta} b_\delta$. Если S — структура двусторонних идеалов некоторого кольца (в частности, структура P-идеалов алгебры с условием минимальности), то центр всякой пары двусторонних прямых разложений этого кольца содержится в идеале $\mathfrak{N}$ полных делителей нуля. Следовательно, в нашем случае, по основной теореме, центр всегда будет заключен в сумме конечных слагаемых. Пара разложений единицы вполне дедекиндовой структуры тогда и только тогда обладает общим продолжением, если центр этой пары разложений равен нулю. Элементы a и b структуры S называются **прямо подобными**, если в S существует такой элемент c, что $a + c = b + c = 1$, $ac = bc = 0$. В нашем случае алгебры с условием минимальности прямое подобие означает, что P-идеалы a и b изоморфны между собой, так как они оба изоморфны алгебре вычетов всей алгебры A по идеалу c.

Если центр z прямых разложений $1 = a + \sum\limits_{\nu} u_\nu = \sum b_\beta$ удовлетворяет условию $z \leqslant a$, то эти разложения обладают прямо подобными продолжениями.

Отсюда мы можем сделать следующие выводы.

Пусть алгебра A, по основной теореме, представлена как прямая сумма конечного числа неразложимых слагаемых:

$$A = A_1 + A_2 + \ldots + A_s + A_{s+1} + \ldots + A_n,$$

причем неразложимые слагаемые перенумерованы так, что на первых местах стоят слагаемые бесконечного ранга, а последующие имеют конечный ранг. Введем обозначение $A_{s+1} + A_{s+2} + \ldots + A_n = a$. Сравним теперь два разложения $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_s + a$ и $A = B_1 + B_2 + \ldots + B_m$, где B_i — неразложимые в двустороннюю сумму слагаемые. Так как кольцо полных делителей нуля $\mathfrak{N} \subset a$, эти разложения должны обладать прямо подобными продолжениями, т. е. в продолжениях число слагаемых будет одинаково и их можно поставить во взаимно-однозначное соответствие так, что соответствующие слагаемые будут изоморфны. Но каждое неразложимое слагаемое бесконечного ранга $A_1, A_2, \ldots, A_s$ будет изоморфно неразложимому слагаемому бесконечного ранга в разложении $A = B_1 + B_2 + \ldots + B_m$. Каждое конечное слагаемое из разложения $A = B_1 + B_2 + \ldots + B_m$ будет изоморфно некоторому конечному слагаемому из тех, которые получаются при продолжении разложения $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_s + a$ и в сумме составляют a. Все это позволяет сформулировать следующую теорему.

Теорема 3. *Если в разложении алгебры с условием минимальности на неразложимые слагаемые сумму конечных слагаемых рассматривать как одно слагаемое, то любые два разложения такого рода будут изоморфны, т. е. число слагаемых будет одинаково и между слагаемыми можно установить такое взаимно-однозначное соответствие, что соответствующие слагаемые будут изоморфны.*

Если кольцо полных делителей нуля в алгебре с условием минимальности будет равно нулю (в частности, это выполнено, если алгебра обладает единицей), то любые два разложения в прямую сумму неразложимых слагаемых будут изоморфны.

§ 4. Алгебра называется **локально конечной**, если любое конечное множество ее элементов порождает подалгебру конечного ранга.

Теорема 4. *Всякая локально конечная алгебра с делением при условии минимальности имеет конечный ранг над своим центром.*

С л е д с т в и е 1. *Алгебры с условием минимальности, отличные от прямой двусторонней суммы конечного числа слагаемых, каждое из которых конечно или является алгеброй с делением конечного ранга над своим центром (причем центр есть алгебраическое расширение основного поля), могут существовать лишь при условии, если проблема А. Г. Куроша о локальной конечности алгебраических алгебр, когда степени элементов неограничены, имеет отрицательное решение.*

Справедливо даже такое предложение.

Если R — кольцо с условием минимальности относительно области операторов Σ, где Σ — коммутативное кольцо без делителей нуля с единицей, то R может быть не локально конечным только в том случае, если существуют не локально конечные тела, удовлетворяющие условию минимальности относительно Σ.

С л е д с т в и е 2. *Алгебра с условием минимальности конечна, если степени ее элементов ограничены.*

С л е д с т в и е 3. *Единственным телом, отличным от нуля, с условием минимальности над полем действительных чисел будет алгебра кватернионов.*

Магнитогорский горно-металлургический институт им. Г. И. Носова

Поступило 3 VI 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Max D e u r i n g, Algebren, Berlin, 1935. [2] В. И. Ш н е й д м ю л л е р, Матем. сборн., 27 (69): 2, 219 (1950). [3] А. Г. К у р о ш, Изв. АН СССР, сер. матем., 7, 185 (1943).