Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXVI, № 4

МАТЕМАТИКА

Д. Б. ПОТЯГАЙЛО

# О МНОЖЕСТВЕ ГРАНИЧНЫХ ЗНАЧЕНИЙ МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

*(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 4 VIII 1952)*

1. Во многих случаях, опираясь на известную теорему Римана о конформном отображении областей, исследование граничных свойств мероморфных функций можно проводить геометрически, рассматривая соответствующие римановы поверхности. В настоящей заметке при помощи указанного метода изучается структура множества граничных значений функций, мероморфных в круге $|z|<1$.

2. Определение 1. Пусть $f(z)$ — произвольная, определенная в круге $|z|<1$ мероморфная функция. Обозначая через $\zeta$ произвольную точку граничной окружности $|z|=1$, будем называть число $w$ граничным значением $f(z)$ в точке $\zeta$, если существует по крайней мере одна последовательность точек $z_n$ в круге $|z|<1$, для которой

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \zeta, \qquad \lim_{n\to\infty} f(z_n) = w.$$

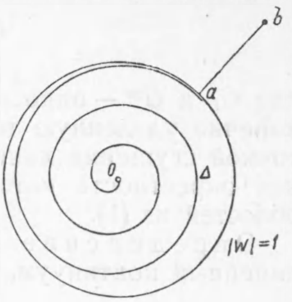

Рис. 1

Легко доказать, что множество граничных значений всякой мероморфной в единичном круге функции является континуумом. Известно ([1]), что в случае, когда $\zeta=\zeta_0$ — некоторая фиксированная точка окружности $|z|<1$, имеет место и обратная теорема, утверждающая, что, каков бы ни был континуум $K$, расположенный в комплексной плоскости $S$, существует мероморфная в круге $|z|<1$ функция $f(z)$, множество граничных значений которой в точке $\zeta_0$ совпадает с $K$.

Однако оказывается, что в общем случае приведенная теорема не имеет места. Последнее вытекает из рассмотрения следующего примера.

Пример. Обозначим через $\Gamma$ канторов континуум, состоящий из окружности $|w|=1$ с примыкающим к ней отрезком $ab$ (рис. 1) и бесконечной спирали $\Delta$, сближающейся асимптотически с единичной окружностью. Докажем, что не существует мероморфной в круге $|z|<1$ функции $f(z)$, имеющей своим множеством граничных значений $\Gamma$.

Действительно, предположим противное, т. е. предположим, что существует односвязная риманова поверхность гиперболического типа $F$, обладающая следующими свойствами:

1) $F$ имеет над каждой замкнутой подобластью $\overline{G}\subset S-\Gamma$ не более конечного числа листов;

2) все граничные элементы $F$ расположены над $\Gamma$ и только над ним.

Прежде всего заметим, что из 1), а также из вида $\Gamma$ вытекает конечнолистность $F$ всюду над $S$. Поэтому $F$ имеет не более конечного числа алгебраических точек ветвления.

Пусть $P$ — произвольная точка $F$, расположенная над $\Delta$. Обозначив через $\Delta_P$ дугу на $F$, получаемую при неограниченном продолжении $P$ над $\Delta$, рассмотрим множество $D$ тех дуг $\Delta_P$, которые гомеоморфны открытому отрезку (0, 1). Так как разрез по всякой такой дуге разбивает $F$, то из конечнолистности $F$ следует, что множество $D$ конечно. Следовательно, при достаточно малом $\varepsilon > 0$ поверхность $F$ над кольцом $R_\varepsilon$, $1-\varepsilon < |w| < 1$, вовсе не имеет точек ветвления, а любая граничная или правильная дуга $F$, лежащая над спиралью $\Delta \cap R_\varepsilon$, с ней совпадает.

Пусть $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$ — всевозможные замкнутые контуры, состоящие из внутренних точек $F$ и расположенные над окружностью $|z| = \rho$, где $1-\varepsilon' < \rho < 1$ и $\varepsilon' < \varepsilon$.

Из доказанного выше следует, что из $F$ при помощи сечений $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$ можно выделить связную область $F^* \subset F$, расположенную в точности над кругом $|w| < 1$ и содержащую граничные точки $F$ над $\Delta$. Так как $F^*$ не принадлежит ни одна точка $F$, проекция которой на $S$ лежит вне круга $|w| < 1$, то, в частности, $F$ не содержит граничных точек над $ab$. Последнее противоречит нашему предположению об односвязности $F$. Тем самым все доказано.

3. Ниже приводятся достаточные условия существования мероморфных функций с указанными граничными свойствами.

Пусть $K$ — произвольный канторов континуум, расположенный в $S$. Обозначим через

$$G = \sum_{i=1}^{\infty} G_i + G^{\infty}, \tag{1}$$

где $G_i$ и $G^{\infty}$ — односвязные области ($G^{\infty}$ — область, содержащая бесконечно удаленную точку), дополнение $K$ до всей плоскости. Назовем точкой сгущения линейного континуума всякую точку $K$, произвольная окрестность которой имеет общие точки с бесконечным числом областей из (1).

Определение 2. Будем называть элементарным континуумом линейный континуум, у которого множество

$$N = N_1 + N_2,$$

где $N_1$ обозначает множество точек сгущения $K$, а $N_2$ — множество недостижимых (в смысле Каратеодори) граничных точек для областей (1), таково, что $S - N$-связная область.

Определение 3. Последовательность линейных континуумов $\{K_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, назовем сцепленной, если для всякого $D_p = S - \overline{G_p^{\infty}}$ можно указать область $G_{pi} \subset D_p$, содержащую достижимые внешние граничные точки и такую, что $G_{pi} = G_{qj} \subset D_q$ по крайней мере для одного $q$, $q < p$. $G_p = \sum_i G_{pi} + G_p^{\infty}$ и $G_q = \sum_j G_{qj} = G_q^{\infty}$ суть дополнения $K_p$ и $K_q$ до всей плоскости. Имеет место следующая

Теорема. *Если линейный континуум $K$ можно представить в виде счетной суммы сцепленных элементарных континуумов* *

$$K = K_1 + K_2 + \ldots + K_n + \ldots$$

*таких, что*

---

* Приведенный выше пример показывает, что такое представление не всегда возможно.

1) *начиная с некоторого $n$, все $K_n \subset \overline{D}_n = \sum_i \overline{G}_{ni}$, где $D_n$ — связные области;*

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{mes} D_n = 0$,

*то существует мероморфная в круге $|z| < 1$ функция, множество граничных значений которой совпадает с $K$.*

Полученный результат легко обобщается на случай произвольного, не обязательно линейного континуума $\mathfrak{R}$. В общем случае двумерную часть такого континуума можно представить в виде суммы связных областей $\{B_k\}$, $k = 1, 2, \ldots$, где $\overline{B}_i \cap \overline{B}_j$ для любой пары $i \neq j$ не содержит ни одного связного подмножества точек, а $\overline{B}_i \cap C\overline{B}_i = \sum\limits_{k=1}^{\infty} R_{ik}$; $R_{ik}$ — связные множества и $R_{im} \cap R_{in} = 0$ для $m \neq n$. Поставив в соответствие каждой паре множеств $R_{ip}$ и $R_{ip+1}$, $p = 1, 2, \ldots$, жорданову кривую $\delta_{ip} \subset B_i$, $\delta_{ip} \cap \delta_{iq} = 0$, $p \neq q$, идущую из некоторой точки $R_p$ в точку множества $R_{p+1}$, преобразуем $B_i$, $i = 1, 2, \ldots$, в односвязные области $B_i^*$, $i = 1, 2, \ldots$ Для этого примем каждую точку $\delta_{ip}$, $i = 1, 2, \ldots$, $p = 1, 2, \ldots$, за внутреннюю граничную точку соответствующей области $B_i^*$. Если теперь обозначить полученный континуум $\mathfrak{R}^*$, будем иметь следствие.

Следствие. *Если линейный континуум $\mathfrak{R}^* \cap C\mathfrak{R}^*$ удовлетворяет всем условиям предыдущей теоремы, то существует мероморфная в круге $|z| < 1$ функция $f(z)$, имеющая своим множеством граничных значений $\mathfrak{R}$.*

Поступило
7 VI 1952

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] L. Weigand, Comment. Math. Helvetici, 22, 2 (1949).