Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXVI, № 4

МАТЕМАТИКА

М. Н. ОЛЕВСКИЙ

К ФОРМУЛЕ ТЭЙЛОРА — ДЕЛЬСАРТА И О СРЕДНЕМ ЗНАЧЕНИИ ФУНКЦИИ НА ПОВЕРХНОСТИ СФЕРЫ В ПРОСТРАНСТВЕ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 8 VIII 1952)

Дельсарту [1] принадлежит довольно далеко идущее обобщение формулы Тэйлора. Цель заметки — указать возможность ее дальнейшего расширения, при помощи которого можно, в частности, получить обобщение формулы Пицетти [3].

I. 1. Пусть мы имеем уравнение

$$A_t u(x, t) = B_x u(x, t), \tag{1}$$

где $A_t = \frac{d^2}{dt^2} - p(t)\frac{d}{dt} - q(t)$, $t \geqslant 0$; $B_x = \frac{d^2}{dx^2} - P(x)\frac{d}{dx} - Q(x)$, $x \geqslant 0$; p, q, P, Q — непрерывные функции в каждом конечном промежутке.

Предположим, что функция $f(x)$ $(x \geqslant 0)$ имеет непрерывную вторую производную. Обозначим через $T_x^t f(x)$, $x \geqslant t \geqslant 0$, решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям

$$u(x, t)\Big|_{t=0} = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0. \tag{2}$$

Зная функцию Римана $v(x, t; \xi, \tau)$ для уравнения (1), можно, как известно, записать явное выражение для $T_x^t f(x)$. С другой стороны, зная решение $\varphi(t, \lambda)$ уравнения

$$Ay = \lambda y, \tag{3}$$

удовлетворяющее условиям

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \tag{4}$$

в предположении, что $\varphi(t, \lambda)$ допускает разложение по степеням λ:

$$\varphi(t, \lambda) = \sum_0^\infty \lambda^n \varphi_n(t), \tag{5}$$

формально имеет смысл решению $T_x^t f(x)$ сопоставить ряд

$$\sum_0^\infty \varphi_n(t) B^n f(x). \tag{6}$$

Для того чтобы установить условия представимости решения задачи (1), (2) в форме (6), рассмотрим (в предположении, что для всех m от 1 до $n+1$ существуют операторы $B^m f(x)$) разность

$$T_x^t f(x) - \sum_0^n \varphi_m(t) B^m f(x) = R_n(x, t). \tag{7}$$

Так как $A\varphi_m = \varphi_{m-1}$, $m \geqslant 1$, $A\varphi_0 = 0$, а также $\varphi_0(0) = 1$, $\varphi_m(0) = 0$, $m \geqslant 1$; $\varphi_m'(0) = 0$, $m \geqslant 0$ (это следует из того, что (5) удовлетворяет (3) и (4)), то

$$A_t R_n(x, t) - B_x R_n(x, t) = \varphi_n(t) B^{n+1} f(x), \tag{8}$$

$$R_n(x, t)\big|_{t=0} = 0, \qquad \frac{\partial R_n}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0. \tag{9}$$

Следовательно,

$$R_n(x, t) = \iint\limits_{\triangle} v(x, t; \xi, \tau)\, \varphi_n(\tau) B^{n+1} f(\xi)\, d\xi\, d\tau \tag{10}$$

($\triangle$ — треугольник с вершинами в точках (x, t), $(x - t, 0)$, $(x + t, 0)$) и мы имеем **формулу** (7) **для** $T_x^t f(x)$ **с остаточным членом** (10), которая в случае $A \equiv B$ отвечает формуле Дельсарта*.

Замечание. Для решения $\overline{T}_x^t f(x)$ уравнения (1), удовлетворяющего начальным условиям $u(x, 0) = 0$, $\dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = f(x)$, имеет место формула, аналогичная (7). Она получается из (7), если в последней заменить функции $\varphi_n(t)$ на $\psi_n(t)$, где $\psi_n(t)$ $(n = 0, 1, \ldots)$ суть коэффициенты разложения по степеням λ решения $\psi(t, \lambda)$ уравнения (3), удовлетворяющего условиям $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

2. В предположении, что φ_n и v в $\triangle$ неотрицательны, мы имеем

$$R_n(x, t) = B^{n+1} f(\zeta) \iint\limits_{\triangle} \varphi_n(\tau)\, v(x, t; \xi, \tau)\, d\xi\, d\tau, \tag{11}$$

где $\zeta = x + \theta t$, $|\theta| < 1$.

Второй множитель справа есть решение уравнения $A_t u - B_x u = \varphi_n(t)$, удовлетворяющее условиям $u\Big|_{t=0} = \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0$. При $Q = 0$ таковым является $\varphi_{n+1}(t)$. В этом случае **остаточный член** $R_n(x, t)$ в формуле (7) **приобретает форму****

$$R_n(x, t) = \varphi_{n+1}(t) B^{n+1} f(\zeta)\big|_{\zeta = x + \theta t}. \tag{12}$$

---

* Впрочем, следует отметить, что у Дельсарта линейный оператор $A \equiv B$ не обязательно дифференциальный. При условиях, подобных указанным в (1), можно перенести обобщение, иллюстрируемое нами здесь (и в II, 2 и 3) на специфицированных операторах A, B, на случай линейных операторов, также не обязательно дифференциальных.

** Случай $A \equiv B$ при $P = p = 0$ рассматривался в (2). Там утверждается, что соответствующий остаточный член представляется в форме (12). Это верно только при $Q = 0$, что в рассмотренном там случае ($Q = q$) фактически дает лишь остаточный член формулы Тэйлора.

3. Легко указать (как и в ([2])) простые достаточные признаки для неотрицательности φ_n, ψ_n и v. Имеют место следующие предложения: а) *если функции* $p(x)$, $q(x)$ *неотрицательны, то* $\varphi_n(x) > 0$ *и* $\psi_n(x) > 0$; б) *если функции* P, p, Q, q *монотонно убывают и удовлетворяют неравенствам* $p(x) \geqslant P(x)$, $q(x) \geqslant Q(x)$, *то в треугольнике* $\triangle$ $v(x, t; \xi, \tau) \geqslant 0$.

II. Можно перенести результат Дельсарта и на еще более общий случай, когда, например, один из операторов в (1) попрежнему одномерный, а другой — многомерный.

1. Пусть мы имеем уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta_2 u - ku, \tag{13}$$

Δ_2 — второй дифференциальный параметр Бельтрами, составленный для трехмерного пространства S_3 постоянной кривизны k.

Решение уравнения (13), удовлетворяющее начальным условиям

$$u\Big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = f(P), \tag{14}$$

имеет вид

$$u(P, t) = \frac{\operatorname{sh}\sqrt{-k}\,t}{\sqrt{-k}} M_t\{f(P)\}, \tag{15}$$

где $M_t\{f(P)\}$ обозначает среднее значение функции f на поверхности сферы $\Omega_t(P)$ (в S_3), радиуса t с центром в точке P, поскольку ([4])

$$\frac{\partial^2 M}{\partial t^2} + 2\sqrt{k}\operatorname{ctg}\sqrt{k}\,t\,\frac{\partial M}{\partial t} = \Delta_2 M$$

(оператор Δ_2 в правой части применяется к M как функции точки P).

Для дальнейшего заметим, что единственное решение неоднородного уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (\Delta_2 - k)\,u + g(P, t), \tag{16}$$

удовлетворяющее условиям

$$u\Big|_{t=0} = \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0, \tag{17}$$

представляется в форме (([3]), стр. 188):

$$u(P, t) = \tag{18}$$

$$= \int_0^t \frac{\operatorname{sh}\sqrt{-k}\,\tau}{\sqrt{-k}} \left(\frac{1}{4\pi}\int_{\Omega_\tau(P)} g(Q, t-\tau)\,d\Omega\right) d\tau = \frac{1}{4\pi}\iiint_{\tau < t} \frac{\sqrt{-k}}{\operatorname{sh}\sqrt{-k}\,\tau}\; g(Q, t-\tau)\,dv;$$

$d\Omega$ — элемент поверхности сферы $\Omega_\tau(P)$; dv — элемент объема пространства S_3 (в сферической системе координат); τ — расстояние в S_3 от точки P до переменной точки Q внутри шара, ограниченного $\Omega_t(P)$.

2. Принимая в уравнении (1) $\partial^2/\partial t^2$ за A, а $\Delta_2 - k$ за B, мы имеем (см. замечание в I)

$$\psi(t, \lambda) = \frac{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda}\,t}{\sqrt{\lambda}} = \sum_0^\infty \frac{t^{2n+1}}{2n+1!}\lambda^n, \tag{19}$$

и, таким образом, для разности

$$\frac{\operatorname{sh}\sqrt{-k}\,t}{\sqrt{-k}} M_t\{f(P)\} - \sum_0^n \frac{t^{2m+1}}{2m+1!}(\Delta_2 - k)^m f(P) = R_n(P, t) \tag{20}$$

находим (ср. (8) и (9))

$$\frac{\partial^2 R_n}{\partial t^2} - (\Delta_2 - k) R_n = \frac{t^{2n+1}}{2n+1!} (\Delta_2 - k)^{n+1} f(P), \tag{21}$$

$$R_n \Big|_{t=0} = \frac{\partial R_n}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0. \tag{22}$$

Из (21) и (22), согласно (18), имеем

$$R_n(P,t) = \frac{1}{4\pi} \iiint\limits_{\tau \leqslant t} \frac{\sqrt{-k}}{\operatorname{sh}\sqrt{-k}\,\tau} \frac{(t-\tau)^{2n+1}}{2n+1!} (\Delta_2 - k)^{n+1} f(Q)\, dv. \tag{23}$$

По теореме о среднем значении, получаем

$$R_n(P,t) = (\Delta_2 - k)^{n+1} f(P^*) \iiint\limits_{\tau \leqslant t} \frac{\sqrt{-k}}{\operatorname{sh}\sqrt{-k}\,\tau} \frac{(t-\tau)^{2n+1}}{4\pi(2n+1)!}\, dv, \tag{24}$$

где P^* — надлежащая точка внутри шара $\tau \leqslant t$.

Последний множитель правой части (24) представляет собой, согласно (16), (17) и (18), решение уравнения (16) с $g = t^{2n+1} / 2n + 1!$, удовлетворяющее условиям (17). Таковым является функция:

$$(\sqrt{-k})^{-2n-3} \left\{ \operatorname{sh}\sqrt{-k}\,t - \left[\sqrt{-k}\,t + \frac{(\sqrt{-k}\,t)^3}{3!} + \cdots + \frac{(\sqrt{-k}\,t)^{2n+1}}{2n+1!}\right]\right\} = \omega_n(t).$$

Следовательно,

$$R_n(P,t) = \omega_n(t) (\Delta_2 - k)^{n+1} f(P^*), \tag{25}$$

или

$$R_n(P,t) = \frac{t^{2n+3}}{2n+3!} \operatorname{ch}\sqrt{-k}\,\bar{t}\, (\Delta_2 - k)^{n+1} f(P^*), \quad 0 < \bar{t} < t. \tag{26}$$

Таким образом, мы получаем формулу для среднего значения $M_t\{f(P)\}$ функции f на поверхности сферы (в пространстве S_3) радиуса t с центром в точке P:

$$M_t\{f(P)\} = \frac{\sqrt{-k}}{\operatorname{sh}\sqrt{-k}\,t} \left[\sum_0^n \frac{t^{2m+1}}{2m+1!} (\Delta_2 - k)^m f(P) + R_n(P,t)\right] \tag{27}$$

с остаточным членом $r_n(P,t) = \frac{\sqrt{-k}}{\operatorname{sh}\sqrt{-k}\,t} R_n(P,t)$, где $R_n(P,t)$ определяется по (23), (25) и (26), которая при $k \to 0$ обращается в известную формулу Пицетти ([3], стр. 290).

3. Принимая же в (1) $\partial^2 / \partial t^2 + k$ за A, а Δ_2 за B, мы получим другую форму обобщения в S_3 формулы Пицетти:

$$M_t\{f(P)\} = \frac{\sqrt{-k}}{\operatorname{sh}\sqrt{-k}\,t} \left[\sum_0^n \psi_m(t)\, \Delta_2^m f(P) + \widetilde{R}_n(P,t)\right], \tag{28}$$

где

$$m!\,\psi_m(t) = \left(\frac{d^m}{d\lambda^m} \frac{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda - k}\,t}{\sqrt{\lambda - k}}\right)_{\lambda=0} = \sqrt{\pi}\left(\frac{t}{2\sqrt{-k}}\right)^{m+1/2} I_{m+1/2}(\sqrt{-k}\,t),$$

$$\widetilde{R}_n(P,t) = \frac{1}{4\pi} \iiint\limits_{\tau \leqslant t} \frac{\sqrt{-k}}{\operatorname{sh}\sqrt{-k}\,\tau} \psi_n(t-\tau)\, \Delta_2^{n+1} f(P)\, dv. \tag{29}$$

При $k < 0$ (в силу знакопостоянства функции ψ_n в этом случае) можно (ср. (12)) представить $\widetilde{R}_n$ и в следующей форме

$$\widetilde{R}_n(P,t) = \psi_{n+1}(t)\, \Delta_2^{n+1} f(P^*). \tag{30}$$

Поступило
4 VII 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] J. Delsartes, J. des Math. pures et appl., 17, 231 (1938). [2] Б. М. Левитан, ДАН, 73, № 2 (1950). [3] Р. Курант, Д. Гильберт, Методы математической физики, 2, 1945. [4] М. Н. Олевский, ДАН, 45, № 3 (1944).