Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXVI, № 4

МАТЕМАТИКА

М. А. ДЖАВАДОВ

КОНФОРМНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В ЕВКЛИДОВЫХ И ПСЕВДОЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ЛЮБОГО ЧИСЛА ИЗМЕРЕНИЙ КАК ДРОБНО-ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 20 VII 1952)

Как известно, круговые преобразования евклидовой плоскости R_2 представляются дробно-линейными преобразованиями плоскости комплексного переменного. Как показал Штуди [1], конформные преобразования 3-мерного евклидова пространства R_3 и 4-мерного евклидова пространства R_4, являющиеся аналогами круговых преобразований на плоскости, представляются дробно-линейными преобразованиями пространства кватернионов, в первом случае переводящими в себя гиперплоскость этого пространства.

Как показал Б. А. Розенфельд [2,3], аналогичные представления имеют место и для псевдоевклидовых пространств: круговые преобразования псевдоевклидовой плоскости ${}^1R_2$ представляются дробно-линейными преобразованиями плоскости двойного переменного, а конформные преобразования псевдоевклидовых пространств ${}^1R_3$ и ${}^2R_4$ представляются дробно-линейными преобразованиями пространства псевдокватернионов; в случае ${}^1R_3$ дробно-линейные преобразования переводят в себя гиперплоскость пространства псевдокватернионов.

В настоящей работе показывается, что конформные преобразования любого евклидова пространства R_n и псевдоевклидова пространства ${}_lR_n$ можно представить в виде дробно-линейных преобразований в некоторой алгебре чисел более сложной природы.

Прежде всего рассмотрим псевдоевклидово пространство ${}^{n-1}R_{2n-1}$ с основной метрической формой

$$(\overline{x}, \overline{x}) = x^{1^2} - x^{2^2} + x^{3^2} - x^{4^2} + \cdots - x^{2n-2^2} + x^{2n-1^2} \tag{1}$$

(т. е. в выражении $(\overline{x}, \overline{x})$ число отрицательных членов равно $n-1$).

Каждой точке этого пространства с координатами $(x^1, x^2, \ldots, x^{2n-1})$ можно поставить во взаимно-однозначное соответствие вещественную матрицу 2^{n-1}-го, порядка имеющую вид

$$X^{(n)} = \begin{pmatrix} X^{(n-1)} & (x^{2n-2} + x^{2n-1})\, E^{(n-1)} \\ (-x^{2n-2} + x^{2n-1})\, E^{(n-1)} & -X^{(n-1)} \end{pmatrix}, \tag{2}$$

где $E^{(n-1)}$ — единичная матрица 2^{n-2}-го порядка; $X^{(n-1)}$ — матрица 2^{n-2}-го порядка, рекурентно определяемая по формуле (2) и начальному значению $X^{(1)} = x^1$.

В частности, для ${}^1R_3$ и ${}^2R_5$ эта матрица имеет, соответственно, вид

$$X^{(2)} = \begin{pmatrix} x^1 & x^2 + x^3 \\ -x^2 + x^3 & -x^1 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

и

$$X^{(3)}=\begin{pmatrix} x^1 & x^2+x^3 & x^4+x^5 & 0 \\ -x^2+x^3 & -x^1 & 0 & x^4+x^5 \\ -x^4+x^5 & 0 & -x^1 & -x^2-x^3 \\ 0 & -x^4+x^5 & x^2-x^3 & x^1 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Группа конформных преобразований пространства $^{n-1}R_{2n-1}$ изоморфна группе дробно-линейных преобразований

$$w=(Az+B)(Cz+D)^{-1} \tag{5}$$

в алгебре вещественных матриц 2^{n-1}-го порядка, переводящих в себя подпространство этой алгебры, состоящее из матриц вида (2).

Если нам дано евклидово пространство R_{2n-1} с основной метрической формой

$$(\overline{x}, \overline{x}) = x^{1^2}+x^{2^2}+\cdots+x^{2n-2^2}+x^{2n-1^2} \tag{6}$$

или псевдоевклидово пространство $^lR_{2n-1}$ ($l<n-1$; случай, когда $l>n-1$, приводится к предыдущему умножением расстояния между двумя точками на i) с основной метрической формой

$$(\overline{x}, \overline{x}) = x^{1^2} \pm x^{2^2} + x^{3^2} \pm x^{4^2} + \cdots \pm x^{2n-2^2} + x^{2n-1^2}, \tag{7}$$

то каждой точке этого пространства можно поставить в соответствие комплексную матрицу 2^{n-1}-го порядка, получающуюся из матрицы (2) заменой каждой координаты x^{2k}, которой в (6) и (7) соответствует знак $+$, на ix^{2k}. В частности, для R_3 и R_5 эта матрица имеет вид

$$X^{(2)}=\begin{pmatrix} x^1 & ix^2+x^3 \\ -ix^2+x^3 & -x^1 \end{pmatrix}, \tag{8}$$

$$X^{(3)}=\begin{pmatrix} x_1 & x^3+ix^2 & ix^4+x^5 & 0 \\ x^3-ix^2 & -x^1 & 0 & ix^4+x^5 \\ -ix^4+x^5 & 0 & -x^1 & -x^3-ix^2 \\ 0 & -ix^4+x^5 & -x^3+ix^2 & x^1 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Группа конформных преобразований пространств R_{2n-1} и $^lR_{2n-1}$ изоморфна группе дробно-линейных преобразований (5) *в алгебре комплексных матриц 2^{n-1}-го порядка, переводящих в себя подпространство этой алгебры, состоящее из матриц, получающихся из матрицы* (2) *заменой каждой координаты x^{2k}, которой в* (6) *и* (7) *соответствует знак $+$, на ix^{2k}.*

Рассмотрим теперь псевдоевклидово пространство $^nR_{2n}$ с основной метрической формой

$$(x, x) = x^{1^2} - x^{2^2} + x^{3^2} - x^{4^2} + \cdots + x^{2n-1^2} - x^{2n^2}. \tag{10}$$

Каждой точке этого пространства с координатами $(x^1, x^2, \ldots, x^{2n})$ можно поставить во взаимно-однозначное соответствие двойную матрицу 2^{n-1}-го порядка, имеющую вид

$$X^{(n)}(e) = X^{(n)} + ex^{2n}E^{(n)} = \begin{pmatrix} X^{(n-1)} + ex^{2n}E^{(n-1)} & (x^{2n-2}+x^{2n-1})E^{(n-1)} \\ (-x^{2n-2}+x^{2n-1})E^{(n-1)} & -X^{(n-1)} + ex^{2n}E^{(n-1)} \end{pmatrix}, \tag{11}$$

где $E^{(n-1)}$ и $X^{(n-1)}$ имеют то же значение, что и в формуле (2). В частности, для $^1R_2$, $^2R_4$, $^3R_6$ эта матрица имеет, соответственно, вид:

$$X^{(1)}(e) = x^1 + ex^2, \tag{12}$$

$$X^{(2)}(e) = \begin{pmatrix} x^1 + ex^4 & x^2 + x^3 \\ -x^2 + x^3 & -x^1 + ex^4 \end{pmatrix}, \tag{13}$$

$$X^{(3)}(e) = \begin{pmatrix} x^1 + ex^6 & x^2 + x^3 & x^4 + x^5 & 0 \\ -x^2 + x^3 & -x^1 + ex^6 & 0 & x^4 + x^5 \\ -x^4 + x^5 & 0 & -x^1 + ex^6 & -x^2 - x^3 \\ 0 & -x^4 + x^5 & x^2 - x^3 & x^1 + ex^6 \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Группа конформных преобразований пространства $^nR_{2n}$ *изоморфна группе дробно-линейных преобразований*

$$w = (Az + B)(Cz + D)^{-1} \quad \text{и} \quad w = (A\bar{z} + B)(C\bar{z} + D)^{-1} \tag{15}$$

в алгебре двойных матриц 2^{n-1}*-го порядка, переводящих в себя подпространство этой алгебры, состоящее из матрицы вида* (11) (под матрицей $\bar{z}$ понимается двойная матрица, все элементы которой являются двойными числами, сопряженными с элементами двойной матрицы z).

Если нам дано евклидово пространство R_{2n} с основной метрической формой

$$(\bar{x}, \bar{x}) = {x^1}^2 + {x^2}^2 + \cdots + {x^{2n-1}}^2 + {x^{2n}}^2 \tag{16}$$

или псевдоевклидово пространство $^lR_{2n}$ с основной метрической формой

$$(\bar{x}, \bar{x}) = {x^1}^2 \pm {x^2}^2 + {x^3}^2 \pm {x^4}^2 + \cdots + {x^{2n-1}}^2 \pm {x^{2n}}^2, \tag{17}$$

то каждой точке этих пространств можно поставить в соответствие двойную комплексную матрицу 2^{n-1}-го порядка, получающуюся из матрицы (11) заменой каждой координаты x^{2k}, которой в (16) и (17) соответствует знак $+$, на ix^{2k}. В частности, для R_2, R_4 и R_6 эта матрица имеет, соответственно, вид:

$$X^{(1)}(e) = x^1 + iex^2, \tag{18}$$

$$X^{(2)}(e) = \begin{pmatrix} x^1 + iex^4 & x^3 + ix^2 \\ x^3 - ix^2 & -x^1 + iex^4 \end{pmatrix}, \tag{19}$$

$$X^{(3)}(e) = \begin{pmatrix} x^1 + iex^6 & x^3 + ix^2 & x^5 + ix^4 & 0 \\ x^3 - ix^2 & -x^1 + iex^6 & 0 & x^5 + ix^4 \\ x^5 - ix^4 & 0 & -x^1 + iex^6 & -x^3 - ix^2 \\ 0 & x^5 - ix^4 & -x^3 + ix^2 & x^1 + iex^6 \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Группа конформных преобразований пространств R_{2n} *и* $^lR_{2n}$ *изоморфна группе дробно-линейных преобразований* (15) *в алгебре двойных комплексных матриц* 2^{n-1}*-го порядка, переводящих в себя подпространство этой алгебры, состоящее из матриц, получающихся из матрицы* (11) *заменой каждой координаты* x^{2k}*, которой в* (16) *и* (17) *соответствует знак* $+$*, на* ix^{2k}.

Выражения (12) являются двойными числами, выражения (18) представляют комплексные числа, матрицы (13) и (19) представляют, соответственно, псевдокватернионы и кватернионы, матрицы (3) и (8) представляют, соответственно, псевдокватернионы и кватернионы, связанные одним линейным условием, откуда вытекает, что из изложенных результатов как частные случаи следуют все ранее известные случаи представления круговых преобразований R_2 и ${}^1R_2$ и конформных преобразований R_3, ${}^1R_3$, R_4 и ${}^2R_4$.

Заметим, что рассматриваемые нами вещественные, комплексные, двойные и двойные комплексные матрицы 2^{n-1}-го порядка таковы, что матрицы $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ дробно-линейных преобразований в этих алгебрах, переводящих в себя подпространства этих алгебр, изображающих пространства R_{2n-1}, R_{2n}, ${}^lR_{2n-1}$ и ${}^lR_{2n}$, представляют спинорные группы альтернионов и псевдоальтернионов (чисел Клиффорда и их аналогов), дважды накрывающих группы движений неевклидовых пространств ${}^1S_{2n}$, ${}^1S_{2n+1}$, ${}^{l+1}S_{2n}$ и ${}^{l+1}S_{2n+1}$ ([4]).

Связь неевклидовых пространств ${}^1S_{2n}$, ${}^1S_{2n+1}$, ${}^{l+1}S_{2n}$, ${}^{l+1}S_{2n+1}$ с конформными преобразованиями пространств R_{2n-1}, R_{2n}, ${}^lR_{2n-1}$ и ${}^lR_{2n}$ вытекает из известной интерпретации Дарбу (([5]), стр. 197), согласно которой многообразия гиперсфер R_{2n-1}, R_{2n}, ${}^lR_{2n-1}$ и ${}^lR_{2n}$, если считать за расстояние между двумя гиперсферами их угол, изометричны, соответственно, неевклидову пространству ${}^1S_{2n}$, ${}^1S_{2n+1}$, ${}^{l+1}S_{2n}$, ${}^{l+1}S_{2n+1}$, причем сами пространства R_{2n-1}, R_{2n}, ${}^lR_{2n-1}$, ${}^lR_{2n}$, изображаются абсолютами соответственных неевклидовых пространств, а конформные преобразования R_{2n-1}, R_{2n}, ${}^lR_{2n-1}$, ${}^lR_{2n}$ изображаются движениями соответствующих евклидовых пространств. Поэтому изложенные нами результаты дают новый метод геометрического истолкования спинорных представлений движений неевклидовых пространств.

Согласно геометрическому истолкованию этих представлений, предложенному Э. Картаном ([6]), спиноры, т. е. векторы тех линейных пространств, в которых осуществляются линейные преобразования, представляющие соответственные спинорные группы, определяются образующими плоскостями максимальной размерности абсолютов соответственных неевклидовых пространств, которые для большинства неевклидовых пространств мнимы и поэтому не наглядны. Так как матрицы (2), (11) и их аналоги преобразуются при движениях неевклидовых пространств дробно-линейно, то если мы представили эти матрицы в виде отношения $z=z^0z^{1^{-1}}$, матрицы z^0 и z^1 преобразуются при этих движениях линейно и также могут считаться координатами спиноров этих пространств. Однако, в отличие от спиноров, рассматриваемых Картаном, эти спиноры определяются точками абсолютов соответствующих неевклидовых пространств ${}^1S_{2n}$, ${}^1S_{2n+1}$, ${}^{l+1}S_{2n}$ и ${}^{l+1}S_{2n+1}$ и носят совершенно наглядный характер для всех неевклидовых пространств.

Аналогичное истолкование спинорных представлений может быть построено и для неевклидовых пространств S_{2n} и S_{2n+1}, движения которых не представляют конформных преобразований пространств R_{2n-1}, R_{2n}, ${}^lR_{2n-1}$ и ${}^lR_{2n}$.

Азербайджанский государственный университет
им. С. М. Кирова

Поступило
27 VI 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] E. Study, Math. Zs., 18, 55, 201 (1923); 21, 45, 174 (1924). [2] Б. А. Розенфельд, Тр. Азерб. гос. ун-та, 1, 33 (1952). [3] Б. А. Розенфельд, ДАН, 74, № 3, 421 (1950). [4] Б. А. Розенфельд, Тр. семинара по векторн. и тензорн. анализу при МГУ, в. 6, 506 (1948). [5] Ф. Клейн, Высшая геометрия, М.— Л., 1939. [6] Э. Картан, Теория спиноров, М., 1948