Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXVI, № 4

МАТЕМАТИКА

Ф. Д. ГАХОВ

ОБ ОБРАТНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ*

(Представлено академиком М. В. Келдышем 12 VII 1952)

§ 1. Обратная краевая задача, рассматриваемая в настоящем сообщении, физические истоки которой лежат в теории струйного течения жидкости, первоначально была сформулирована как задача определения контура области по заданным на нем значениям гармонической в области функции u и ее нормальной производной $\partial u/\partial n$. Обратные краевые задачи сразу нашли технические применения, прежде всего в гидромеханике и теории упругости. Здесь мы их не касаемся.

М. Т. Нужин [1] изменил постановку задачи, задавая на искомом контуре вместо гармонической функции и ее нормальной производной значения двух сопряженных гармонических функций как функции дуги искомого контура. Таким образом, обратная краевая задача по форме из задачи теории потенциала стала задачей аналитических функций. Легко усмотреть, что обе постановки задачи равносильны.

Целью настоящего сообщения является: 1) уточнить постановку задачи в ее простейшем случае; 2) исследовать условия функционального характера, налагаемые на заданные функции и искомый контур; 3) доказать разрешимость так называемой внешней задачи.

§ 2. Даны две функции параметра s

$$u = u(s), \qquad v = v(s), \tag{1}$$

периодические с периодом l, удовлетворяющие условию: для двух значений параметра $s_1 \neq s_2$ $[u(s_1) - u(s_2)]^2 + [v(s_1) - v(s_2)]^2 \neq 0$. Уравнения (1) определяют в плоскости комплексного переменного $w = u + iv$ простую замкнутую кривую L_w, делящую плоскость на две области: внутреннюю D_w^+ и внешнюю D_w^-.

«Внутренняя» задача. Определить в плоскости z кривую L_z, ограничивающую конечную область D_z^+ (вообще говоря, многолистную), так, чтобы, считая параметр s длиной дуги кривой L_z, выражение $u(s) + iv(s)$ было краевым значением аналитической функции, конформно отображающей область D_z^+ на область D_w^+ или D_w^-.

«Внешняя» задача. Если в предыдущей формулировке конечную область D_z^+ заменить на область D_z^-, содержащую бесконечно удаленную точку, то получим постановку внешней обратной краевой задачи.

---

* Основная часть содержания настоящего сообщения была предметом доклада автора на конференции по теории функций комплексного переменного в Москве в ноябре 1950 г.

Так как области D_w^+ или D_w^- можно предварительно отобразить на некоторую стандартную область, например внутренность единичного круга, то задачи для D_w^+ и D_w^- существенно не отличаются друг от друга.

Будем считать, что положительное направление как данного, так и искомого контуров выбрано так, чтобы области D_z^+, D_w^+ оставались слева. Тогда на основании свойств конформного отображения получим, как необходимое условие разрешимости обратных краевых задач, требование, чтобы при возрастании s от нуля до l контур L_w обходился для внутренней задачи в положительном, для внешней — в отрицательном направлении. В дальнейшем при исследовании вопросов разрешимости будем считать эти условия выполненными.

§ 3. Рассмотрим сначала простейшую внутреннюю задачу. Не задаваясь вопросом о наиболее общей постановке задачи, будем считать $u(s)$, $v(s)$ абсолютно непрерывными функциями. Тогда, как известно, функции $u(s)$, $v(s)$ имеют почти везде конечные производные, которые будут функциями суммируемыми.

Дуга контура L_w

$$\sigma(s)=\int_0^s \sqrt{u'^2(s)+v'^2(s)}\,ds$$

будет функцией абсолютно непрерывной и монотонной; обратная функция $s(\sigma)$ будет также абсолютно непрерывной и монотонной.

Отобразим область D_w^+ на единичный круг вспомогательной плоскости ζ. Тогда, как нетрудно установить, $s=s[\sigma(\theta)]=\omega(\theta)$ будет также абсолютно непрерывной и монотонной. Теперь обратной краевой задаче можно дать следующую «приведенную» формулировку:

Дана $s=\omega(\theta)$ — абсолютно непрерывная монотонно возрастающая функция полярного угла (дуги единичной окружности) плоскости ζ. Отыскать такой спрямляемый контур L_z и аналитическую функцию $z(\zeta)$, чтобы функция $z(\zeta)$ отображала круг $|\zeta|<1$ на область D_z^+, ограниченную кривой L_z так, что дуга контура L_z находится с дугой единичной окружности $|\zeta|=1$ в соответствии, устанавливаемом равенством $s=\omega(\theta)$.

Если допустить, что искомые область D_z^+ и функция $z(\zeta)$ существуют, то производная $dz/d\zeta$ будет принадлежать классу H_1 и на контуре единичного круга будет выполняться соотношение $|dz/d\zeta|=ds/d\theta=\omega'(\theta)$ всюду, где $\omega'(\theta)$ существует, т. е. почти везде. Отсюда следует, что если искомый контур L_z существует, то отыскание его приводится к решению следующей задачи:

Определить аналитическую в круге $|\zeta|=1$ функцию класса H_1, нигде внутри круга не обращающуюся в нуль, модуль которой на единичной окружности равен заданной суммируемой функции $\omega'(\theta)$.

Это есть фундаментальная задача теории обратных краевых задач.

При ее решении исходим из отыскания гармонической в единичном круге функции $\ln|dz/d\zeta|$ по заданным ее значениям на контуре. Очевидно, что при этом необходимо, чтобы $\ln\omega'(\theta)$ был также суммируемой функцией. Я не могу указать точно, какие условия нужно наложить на заданные функции $u(s)$, $v(s)$ для того, чтобы это выполнялось, но можно показать, что достаточно предположить, что $u(s)$, $v(s)$ удовлетворяют условию Липшица. Предполагая, что это условие выполнено, получим для решения задачи следующую формулу:

$$\frac{dz}{d\zeta} = \varphi(\zeta) = e^{i\alpha} \exp \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \omega'(\theta) \frac{e^{i\theta} + \zeta}{e^{i\theta} - \zeta} d\theta,$$

где α — произвольная вещественная постоянная.

Сама функция, производящая конформное отображение единичного круга на область D_z^+, определяется интегралом:

$$z = f(\zeta) = \int \varphi(\zeta) \, d\zeta + C, \tag{2}$$

где C — произвольная комплексная постоянная.

Уравнение искомого контура в комплексной форме запишется в виде:

$$z = f(e^{i\theta}) = x(\theta) + iy(\theta).$$

§ 4. Как показывает формула (2), искомая область определяется с точностью до движения. Задачи, допускающие только такой произвол, считаются имеющими единственное решение. Для исследования вопроса единственности решения обратной краевой задачи обратимся к параметрическому представлению В. И. Смирнова функций класса H_1:

$$\varphi(\zeta) = e^{i\alpha} \exp \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln p(\theta) \frac{e^{i\theta} + \zeta}{e^{i\theta} - \zeta} d\theta \cdot \exp \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + \zeta}{e^{i\theta} - \zeta} d\psi(\theta).$$

Сравнивая последнее выражение с найденным значением, заключаем, что решение будет единственным, если сингулярная функция $\psi(\theta)$ тождественно равна постоянной. Вопрос этот есть классическая проблема, рассмотренная В. И. Смирновым, М. В. Келдышем и М. А. Лаврентьевым. Класс областей, удовлетворяющих указанному условию, в монографии ([2]) назван классом C (В. И. Смирнова).

Решение проблемы единственности обратной краевой задачи можно сформулировать так:

В классе областей C решение внутренней обратной краевой задачи единственно.

§ 5. Рассмотрим внешнюю обратную краевую задачу. Существенным отличием ее от рассмотренной в предыдущем внутренней задачи заключается в том, что функция $z(w)$, конформно отображающая область D_w^+ на область D_z^-, уже не будет аналитической в области, а будет иметь в ней полюс первого порядка в некоторой точке w_0*, соответствующей бесконечно удаленной точке области D_z^-. Производная этой функции будет иметь в области D_w^+ один полюс второго порядка.

Рассуждая аналогично предыдущему, придем к следующей задаче: определить функцию $dz/d\zeta$, аналитическую в единичном круге, за исключением одной точки, где она имеет полюс второго порядка, модуль которой на контуре обращается в заданную функцию $\omega'(\theta)$.

Решение этой задачи дается формулой

$$\frac{dz}{d\zeta} = F(\zeta) = \left(\frac{1 - \bar{\zeta}_0 \zeta}{\zeta - \zeta_0}\right)^2 e^{i\alpha} \exp \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \omega'(\theta) \frac{e^{i\theta} + \zeta}{e^{i\theta} - \zeta} d\theta = \left(\frac{1 - \bar{\zeta}_0 \zeta}{\zeta - \zeta_0}\right)^2 \varphi(\zeta).$$

---

* При этом мы накладываем дополнительное условие, что искомая область D_z^- однолистна в бесконечно удаленной точке.

Сама функция, производящая конформное отображение единичного круга на искомую область D_z^-, определяется интегралом:

$$z = \int \left(\frac{1 - \overline{\zeta}_0 \zeta}{\zeta - \zeta_0} \right)^2 \varphi(\zeta)\, d\zeta + C.$$

Для того чтобы последняя формула определяла функцию без логарифмической особенности, вычет подинтегральной функции относительно точки ζ_0 должен быть равен нулю. Приравнивая нулю этот вычет, придем к уравнению

$$\frac{\varphi'(\zeta_0)}{\varphi(\zeta_0)} = \frac{2\,\overline{\zeta}_0}{1 - |\zeta_0|^2}. \tag{3}$$

Доказательство разрешимости внешней обратной краевой задачи сводится к доказательству разрешимости уравнения (3).

Обозначим полярные координаты точки ζ_0 через r, θ. Произведя некоторые преобразования, можно показать, что комплексное уравнение (3) равносильно двум вещественным уравнениям:

$$\frac{\partial}{\partial r} \ln [(1 - r^2) |\varphi|] = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \theta} \ln [(1 - r^2) |\varphi|] = 0. \tag{4}$$

Систему (4) можно рассматривать как необходимое условие экстремума поверхности

$$t = \Phi(r, \theta) = \ln [(1 - r^2) |\varphi(r, \theta)|].$$

Таким образом, для решения нашей задачи достаточно доказать, что функция $\Phi(r, \theta)$ достигает экстремума внутри единичного круга. Допустим, что функция $\varphi(r, \theta)$ удовлетворяет условию:

$$\lim_{r \to 1} [(1 - r^2) \varphi(r, \theta)] = 0. \tag{5}$$

Тогда, взяв круг радиуса $r = 1 - \varepsilon$, будем иметь, что при достаточно малом ε функция $\Phi(r, \theta)$ будет принимать сколь угодно большие отрицательные значения. Так как внутри этого круга функция ограничена, то ее верхняя грань, которая в замкнутом круге достигается, не может быть достигнута на контуре. Следовательно, эта верхняя грань, являющаяся максимумом функции, достигается внутри круга; отсюда следует, что уравнения (4) разрешимы, а следовательно, и «внешняя» задача разрешима.

Условие (5) наверное выполняется, если исходные функции $u(s)$, $v(s)$ удовлетворяют условию Липшица. Последнее условие не является необходимым и может быть значительно расширено.

Исследование единственности приводит к результату: в классе областей C внешняя обратная краевая задача имеет единственное решение тогда и только тогда, если уравнение (3) имеет единственное решение. Последнее пока неизвестно.

Казанский государственный университет
им. В. И. Ульянова-Ленина

Поступило
12 VII 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. Т. Нужин, Уч. зап. КГУ, 109, кн. 1 (1949). [2] И. И. Привалов, Граничные свойства аналитических функций, 1950.