Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXVI, № 4

МАТЕМАТИКА

М. И. ВИШИК

О КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ СИСТЕМ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ИХ РЕШЕНИЙ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 8 VIII 1952)

1. В настоящей заметке рассматриваются краевые задачи для некоторых классов систем эллиптических дифференциальных уравнений четного порядка. Исследуются вопросы, связанные с разрешимостью и устойчивостью решений этих задач, а также устанавливается возможность приближенного их решения методом Галеркина.

Эти задачи являются обобщением на случай систем уравнений трех известных основных граничных задач, а также так называемой задачи с косой производной (т. е. задачи, в которой на границе задается производная решения по направлению, не обязательно совпадающему с направлением конормали) и тех задач, в которых на разных кусках границы задаются разного типа краевые условия.

Для простоты изложим соответствующие результаты лишь для случая систем второго порядка, хотя они установлены также и для систем порядка $2m$ (обобщение на случай систем уравнений порядка $2m$ не встречает никаких существенных затруднений).

2. Рассмотрим в конечной области D (с границей Γ) n-мерного пространства систему дифференциальных уравнений, которую запишем в матричном виде:

$$Lu \equiv -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^{n} B_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + C(x)\,u(x) = h(x), \qquad (1)$$

где $u(x)$ и $h(x)$ — вектор-функции (будем их иногда для краткости называть просто функциями): $u(x) = (u_1(x), \ldots, u_N(x))$, $h(x) = (h_1(x), \ldots, h_N(x))$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$; $u_i(x)$ и $h_i(x)$ — комплексные функции, а $A_{ij}(x)$, $B_i(x)$, $C(x)$ — квадратные матрицы N-го порядка с комплексными элементами. Предположим, что матрицы $A_{ij}(x)$ и $B_i(x)$ непрерывны в $D+\Gamma$, а их производные $\frac{\partial}{\partial x_i}(A_{ij}(x))$, $\frac{\partial}{\partial x_i}(B_i(x))$ и матрица $C(x)$ непрерывны и ограничены в D. Без ограничения общности, очевидно, можно считать, что $A_{ij}(x) = A_{ji}(x)$.

Пусть граница Γ, которая предполагается достаточно гладкой, разбита на две части Γ_1 и Γ_2: $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, причем размерность $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ не больше $n-2$. В частности, Γ_1 или Γ_2 может быть пустым множеством.

Рассмотрим задачу, состоящую в нахождении решения системы (1) при следующих граничных условиях:

$$u\big|_{\Gamma_1} = \varphi_1(s_1), \quad s_1 \in \Gamma_1, \tag{2}$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} E_{ij}(s_2)\cos(n,\ x_i)\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big|_{\Gamma_2} + Qu\,\big|_{\Gamma_2} = \varphi_2(s_2), \quad s_2 \in \Gamma_2. \tag{3}$$

Здесь $E_{ij}(s_2)$ — матрицы, непрерывно зависящие от точки s_2 границы Γ_2, причем $E_{ij}(s_2) + E_{ji}(s_2) = 2A_{ij}(s_2)$, где $A_{ij}(s_2)$ — значение матрицы $A_{ij}(x)$ на границе Γ_2; n — внешняя нормаль к Γ; Q — линейный оператор, который удовлетворяет, например, следующему условию: Q непрерывно отображает пространство $L_{p'}(\Gamma_2)$ в $L_{q'}(\Gamma_2)$, где $p' < 2(n-1)/(n-2)$, $q' > 2(n-1)/n$, причем под $L_p(\Gamma_2)$ понимается пространство комплексных вектор-функций, заданных на Γ_2, модуль которых суммируем со степенью p по Γ_2*.

С задачей (1), (2), (3) мы связываем билинейную форму

$$E(f,\ g) \equiv \iint\limits_{D}\left(\sum E_{ij}(x)\frac{\partial f(x)}{\partial x_i},\ \frac{\partial g(x)}{\partial x_j}\right)dx, \tag{4}$$

причем матрицы $E_{ij}(x)$ непрерывны в $D+\Gamma$, имеют ограниченные первые производные в D и связаны с матрицами $A_{ij}(x)$ соотношениями $E_{ij}(x) + E_{ji}(x) = 2A_{ij}(x)$, $x \in D$ $(i,\ j = 1,\ \ldots,\ n)$ ($E_{ij}(x)$, вообще говоря, не совпадает с $E_{ji}(x)$); $E_{ij}(x)\big|_{\Gamma_2} = E_{ij}(s_2)$, $s_2 \in \Gamma_2$, где $E_{ij}(s_2)$ — матрицы, входящие в формулу (3); $f(x)$, $g(x)$ — комплексные вектор-функции, достаточно гладкие в D. (Круглыми скобками (,) под знаком интеграла в формуле (4) обозначено скалярное произведение в N-мерном унитарном пространстве векторов.)

Сформулируем теперь условие, которое налагается на форму (4):

Условие $(\tilde{E})$. Для всех достаточно гладких функций $f_1(x)$, обращающихся в нуль на Γ_1, имеет место неравенство

$$\operatorname{Re} E(f_1,\ f_1) + [f_1,\ f_1] \geqslant c^2(\Delta(f_1,\ f_1) + [f_1,\ f_1]), \tag{N}$$

где

$$[f_1,\ g_1] = \iint\limits_{D}(f_1(x),\ g_1(x))\,dx, \qquad \Delta(f_1,\ g_1) = \iint\limits_{D}\sum\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i},\ \frac{\partial g_1}{\partial x_i}\right)dx; \tag{5}$$

c^2 — положительная постоянная, не зависящая от $f_1(x)$.

На мнимую часть формы $E(f_1,\ f_1)$, а также на члены низшего порядка уравнения (1) никаких ограничений не накладывается, кроме сформулированных выше требований гладкости.

Условие $(\tilde{E})$, которое связано с задачей (1), (2), (3), является прямым обобщением условия (E) (а значит, и условия сильной эллиптичности), сформулированного в работе [2] (см. стр. 629) для вещественных коэффициентов и связанного с первой краевой задачей (перенесение условия (E) на случай комплексных коэффициентов очевидно). Действительно, из условия $(\tilde{E})$ мы получаем условие (E) в том частном случае, когда $\Gamma_2 = 0$, $\Gamma_1 = \Gamma$.

Отметим, что *условие* $(\tilde{E})$ *заведомо выполняется, если выполнено следующее алгебраическое условие*:

$$\operatorname{Re}\sum_{i,j=1}^{n}(E_{ij}(x)\overline{\zeta}^{(i)},\ \overline{\zeta}^{(j)}) \geqslant c^2\sum_{i=1}^{n}(\overline{\zeta}^{(i)},\ \overline{\zeta}^{(i)}) \tag{6}$$

для любых векторов $\overline{\zeta}^{(i)}$ $(i = 1, \ldots, n)$ N-мерного унитарного вектор-

---

* Все нижеследующие предложения установлены и в том случае, когда оператор Q неограничен в $L_2(\Gamma_2)$, но его вещественная часть положительно-определенная.

ного пространства. Однако условие (6) более ограничительное, чем условие $(\tilde{E})$, даже в том случае, когда $\Gamma_1 = 0$.

Замечание 1. В случае $\Gamma_1 = \Gamma$, $\Gamma_2 = 0$ задача (1), (2), (3) совпадает с первой краевой задачей, а в случае $\Gamma_1 = 0$, $\Gamma_2 = \Gamma$ задача (1), (2), (3) совпадает с задачей, являющейся обобщением известных второй и третьей краевых задач на случай систем уравнений. В случае одного уравнения, т. е. когда $N = 1$, первая сумма в формуле (3) не совпадает, вообще говоря, с производной по направлению конормали, так как E_{ij} не обязано совпадать с E_{ji} при $j \neq i$. Легко видеть, что эта сумма (в случае $N = 1$) может совпадать при соответствующем выборе E_{ij} с производной по любому некасательному к Γ направлению. Таким образом, задача (1), (2), (3) охватывает так называемый регулярный случай задачи с косой производной.

Замечание 2. Все нижеследующие теоремы с очевидными изменениями остаются в силе и в том случае, если условие $(\tilde{E})$ выполняется лишь после замены матриц $E_{ij}(x)$ в форме $E(f, g)$ матрицами $D(x) E_{ij}(x) F(x)$ $(i, j = 1, \ldots, n)$, где $D(x)$ и $F(x)$ — некоторые фиксированные матричные функции (для самих матриц $E_{ij}(x)$ условие $(\tilde{E})$ может и не выполняться). Очевидно, что умножение на матрицу $D(x)$ сводится, грубо говоря, к замене левых частей системы (1) и краевого условия (3) их линейными комбинациями, а умножение на матрицу $F(x)$ сводится к замене искомой функции по формуле $u = Fv$.

Задачу (1), (2), (3) будем для краткости называть задачей I, а сопряженную с ней задачу, т. е. соответствующую задачу для сопряженной к (1) системы уравнений $L^* v = g$ при граничном условии на Γ_1: $v|_{\Gamma_1} = \psi_1(s_1)$ и граничном условии на Γ_2, аналогичном условию (3), будем называть задачей I*. Относительно разрешимости задач I и I* доказана следующая теорема:

Теорема 1. *Задачи* I *и* I* *образуют фредгольмову пару граничных задач, т. е. для этих задач имеют место три теоремы, аналогичные известным трем теоремам Фредгольма.*

Из этой теоремы, в частности, следует, что из единственности решения задачи I следует ее разрешимость для любых правых частей $h(x)$, $\varphi_1(s_1)$, $\varphi_2(s_2)$. Отсюда легко получить ряд достаточных условий разрешимости, и притом единственной, задачи I. Например, если $\operatorname{Re}[Lw, w] > 0$ для любой гладкой функции $w(x)$, удовлетворяющей условию (2) при $\varphi_1 \equiv 0$ и условию (3) при $\varphi_2 \equiv 0$, то задача единственным образом разрешима для любых правых частей h, φ_1, φ_2.

При исследовании разрешимости задачи I основное значение имеет изучение структуры оператора, соответствующего задаче I.

При $\varphi_1(s_1) \equiv 0$ и в случае единственности, а значит и разрешимости, задачи I оператор L^{-1}, сопоставляющий правым частям $h(x)$, $\varphi_2(s_2)$, $\varphi_1(s_1) \equiv 0$ $(x \in D,\ s_2 \in \Gamma_2,\ s_1 \in \Gamma_1)$ соответствующее решение $u(x)$ задачи I, имеет следующую структуру:

$$u(x) = L^{-1}(h(x), \varphi_2(s_2)) = G^{-1}(1 + iH + T)\, W^*(h(x);\ \varphi_2(s_2)), \tag{7}$$

где G — оператор типа градиента: $Gu = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, u\right)$; G^{-1} — оператор, обратный к оператору G; 1 — единичный оператор; H и T — соответственно, самосопряженный и вполне непрерывный операторы в пространстве R^{Γ_1} элементов Gu с $u|_{\Gamma_1} = 0$, в котором скалярное произведение порождается квадратичной формой

$$\{Gu, Gu\} = \operatorname{Re} E(u, u) + [u, u]. \tag{8}$$

Оператор W^* является сопряженным с оператором вложения W

при соответствующем выборе скалярных произведений (ср. ([3])). Свойства оператора W следуют из теоремы вложения С. Л. Соболева ([1]). Из этих свойств вытекают свойства сопряженного оператора W^* (ср. ([3])). Отметим, что операторы G^{-1} и W^* вполне непрерывны.

Разрешимость задачи I в том случае, когда $\varphi_1(s_1) \neq 0$, а $\varphi_2(s_2) \equiv 0$ и $h(x) \equiv 0$, устанавливается методом, аналогичным методу прямых разложений ([4]).

3. Под задачей I' будем понимать задачу, аналогичную задаче I, причем в ней коэффициенты и функции обозначены, соответственно, через $A'_{ij}(x)$, $B'_i(x)$, $C'(x)$, $u'(x)$, $h'(x)$, $E'_{ij}(x)$, Q', $\varphi'_1(s_1)$, $\varphi'_2(s_2)$. Предположим, что коэффициенты задач I и I' мало отличаются друг от друга:

$$\| E'_{ij}(x) - E_{ij}(x) \| < \varepsilon^*, \quad \| B'_i(x) - B_i(x) \| < \varepsilon, \quad \| C(x) - C'(x) \| < \varepsilon,$$
$$\left\| \frac{\partial}{\partial x_i}(E'_{ij}(x)) - \frac{\partial}{\partial x_i}(E_{ij}(x)) \right\| < \varepsilon, \quad \| Q - Q' \| < \varepsilon \tag{9}$$

$(i, j = 1, \ldots, n)$, где $\| \; \|$ — норма оператора. При этих условиях имеет место следующая теорема:

Теорема 2. *Если задача* I *единственно разрешима, то и задача* I' *обладает этим свойством при достаточно малом* ε. *В случае* $\varphi_1(s_1) \equiv \varphi'_1(s_1) \equiv 0$ *соответствующие решения этих задач* $u(x)$ *и* $u'(x)$ *и их первые частные производные в среднем мало отличаются друг от друга. Точнее, имеет место оценка, аналогичная оценке* (4) *нашей работы* ([3]):

$$\{Gu - Gu', \; Gu - Gu'\}^{1/2} \leqslant C(\| h - h' \|_{L_q(D)} + \| \varphi_2 - \varphi'_2 \|_{L_{q'}(\Gamma_2)}) +$$
$$+ C_1 \varepsilon (\| h \|_{L_q(D)} + \| \varphi_2 \|_{L_{q'}(\Gamma_2)}), \tag{10}$$

где постоянные C *и* C_1 *зависят только от коэффициентов задачи* I *и не зависят от коэффициентов задачи* I'; $q = \frac{2n}{n-2}$, $q' > \frac{2(n-1)}{n}$.

Следовательно, решение задачи I устойчиво относительно всех коэффициентов и правых частей этой задачи. В случае $\varphi_1(s_1) \equiv 0$ характер этой устойчивости дается оценкой (10). Устойчивость решения относительно изменения $\varphi_1(s_1)$ имеет другой характер.

4. Теорема 3. *Задача о собственных значениях для уравнения* $Lu = \lambda u$ *при граничных условиях* (2), (3), *в которых* $\varphi_1 \equiv 0$ и $\varphi_2 \equiv 0$, *имеет точечный и конечнократный спектр, расположенный справа от некоторой вертикальной прямой комплексной плоскости* λ ($\mathrm{Re}\, \lambda_i > M$). *Для регулярных значений* λ *обратный оператор* $(L - \lambda 1)^{-1}$ *вполне непрерывный и имеет структуру, аналогичную* (7).

5. В случае единственности решения (а значит и разрешимости) доказано, что *для приближенного решения задачи* (1), (2), (3), *в которой* $\varphi_1(s_1) \equiv 0$, *может быть применен метод Галеркина. Приближенное решение* $\bar{u}_k(x)$ *этой задачи вместе со своими первыми производными при* $k \to \infty$ *стремится в среднем к точному решению задачи* $u(x)$ *и его первым частным производным, соответственно.* Получена оценка для разности $\bar{u}_k - u$, характеризующая скорость сходимости процесса.

Поступило
2 VII 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Л. Соболев, Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Л., 1950. [2] М. И. Вишик, Матем. сборн., **29** (71): 3 (1951). [3] М. И. Вишик, ДАН, **81**, № 5 (1951). [4] М. И. Вишик, Матем. сборн., **25** (67): 2 (1949).

* Под $\| A - B \|$ понимается максимум модулей отклонения соответствующих элементов матриц A и B.