

ТЕХНИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Г. П. ИВАНЦОВ и Б. Я. ЛЮБОВ

ПРОГРЕВ НЕПОДВИЖНОГО СЛОЯ ШАРОВ ПОТОКОМ
ГОРЯЧЕГО ГАЗА

(Представлено академиком И. П. Бардиным 8 VII 1952)

Решению задачи о прогреве слоя неподвижного кускового материала потоком горячего газа в пренебрежении перепадом температур по толщине куска посвящен ряд работ (1-4). Однако во многих практических случаях перепад температур по толщине куска значителен. Ниже приводится решение этой задачи с учетом прогрева куска по толщине в следующей постановке.

Через слой неподвижных шаров радиуса r_0 , имеющих начальную температуру $\theta_{шн}$, в момент $t=0$ начинается в направлении x движение потока газов, имеющих при входе в слой температуру $\theta_{гн}$. Действительная скорость перемещения газов в слое ω , проходное сечение для газов f . Поверхность шаров на единицу объема слоя $F м^2/м^3$. Коэффициент теплоотдачи α от газов к поверхности шаров постоянен, как и все параметры, характеризующие физические свойства системы.

Пренебрегаем тепловым взаимодействием между шарами вследствие излучения и непосредственного соприкосновения и считаем размер шаров весьма малым по сравнению с размерами слоя.

Следует найти температурное поле газа в функции от x и t , а также в шаре, расположенном на расстоянии x от поверхности слоя.

Математическая формулировка задачи. Внутри каждого из шаров

$$\frac{\partial \theta_{ш}}{\partial t} = a_{ш} \left(\frac{\partial^2 \theta_{ш}}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \theta_{ш}}{\partial r} \right); \quad (a)$$

$a_{ш} = \lambda / c_{ш}$ — температуропроводность материала шара.

Дифференциальное уравнение, связывающее температуру потока газов θ_r и поверхности шаров:

$$\omega \frac{\partial \theta_r}{\partial x} + \frac{\partial \theta_r}{\partial t} + \frac{\alpha F}{f c_r} [\theta_r - \theta_{ш}(r_0, t)] = 0. \quad (б)$$

На поверхности шара:

$$\lambda \left(\frac{\partial \theta_{ш}}{\partial r} \right)_{r=r_0} = \alpha [\theta_r - \theta_{ш}(r_0, t)]. \quad (в)$$

Кроме того,

$$x = 0, \quad \theta_r = \theta_{гн}; \quad x = \omega t, \quad \theta_{ш} = \theta_{шн}. \quad (г)$$

В случае пренебрежения перепадом температуры по объему шара температура газа θ_r и шара $\theta_{ш}$ описываются системой уравнений

$$c_r f \left(\frac{\partial \theta_r}{\partial t} + w \frac{\partial \theta_r}{\partial x} \right) = F \alpha (\theta_{ш} - \theta_r); \quad (1)$$

$$V c_{ш} \frac{\partial \theta_{ш}}{\partial t} = S \alpha (\theta_r - \theta_{ш}); \quad (2)$$

c_r и $c_{ш}$ — теплоемкость на единицу объема газа и материала шаров, соответственно; V — объем шара и S — площадь поверхности шара.

Переходя к безразмерным переменным

$$\xi = \frac{F \alpha}{c_r w f} x; \quad \tau = \frac{\alpha S}{V c_{ш} w} (w t - x) \quad (3)$$

и принимая условия (г), получим

$$\frac{\partial \theta_r}{\partial \xi} = \theta_{ш} - \theta_r, \quad (4)$$

$$\frac{\partial \theta_{ш}}{\partial \tau} = \theta_r - \theta_{ш}, \quad (5)$$

$$\theta_{ш}(\xi, 0) = \theta_{шн}, \quad (6)$$

$$\theta_r(0, \tau) = \theta_{гн}. \quad (7)$$

Применим к (4), (5) интегральное преобразование Лапласа — Карсона на $p \int_0^{\infty} e^{-p\tau} \dots d\tau$ и учтем условие (6):

$$\frac{d\bar{\theta}_r}{d\xi} = \bar{\theta}_{ш} - \bar{\theta}_r, \quad (8)$$

$$p(\bar{\theta}_{ш} - \theta_{шн}) = \bar{\theta}_r - \bar{\theta}_{ш}, \quad (9)$$

$$\bar{\theta}_{ш} = p \int_0^{\infty} e^{-p\tau} \theta_{ш} d\tau, \quad (10)$$

$$\bar{\theta}_r = p \int_0^{\infty} e^{-p\tau} \theta_r d\tau. \quad (11)$$

Совместное решение уравнений (8), (9) при условии (7) дает

$$\begin{aligned} \bar{\theta}_r &= \theta_{шн} - (\theta_{шн} - \theta_{гн}) e^{-\frac{p}{p+1}\xi} = \\ &= \theta_{гн} + (\theta_{шн} - \theta_{гн}) \frac{p}{p+1} \int_0^{\xi} e^{-\frac{p}{p+1}\eta} d\eta, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\bar{\theta}_{ш} = \theta_{шн} - (\theta_{шн} - \theta_{гн}) \frac{1}{p+1} e^{-\frac{p}{p+1}\xi}. \quad (13)$$

Согласно правилам операционного исчисления (5): если $f(\tau) \leftrightarrow \bar{f}(p)$, то $e^{-\tau} f(\tau) \leftrightarrow \frac{p}{p+1} \bar{f}(p+1)$. Кроме того, $e^{-\frac{p}{p+1}\xi} \leftrightarrow e^{-\xi} I_0(2\sqrt{\xi\tau})$, где \leftrightarrow — знак операционного соответствия; $I_0(x)$ — функция Бесселя первого

рода нулевого порядка от мнимого аргумента. Переходя к оригиналу в (12), получим

$$\theta_r = \theta_{rn} - (\theta_{rn} - \theta_{shn}) e^{-\tau} \int_0^{\xi} e^{-\eta} I_0(2\sqrt{\tau\eta}) d\eta. \quad (14)$$

Аналогичным путем можно получить оригинал (13).

Найденные таким образом θ_r и θ_{sh} совпадают с известным решением рассматриваемой задачи (2).

Однако для определения θ_r и θ_{sh} из (12), (13) можно пойти иным путем. Действительно,

$$\bar{\theta}_r = \theta_{shn} - (\theta_{shn} - \theta_{rn}) \left(1 - \frac{p}{p+1} \xi + \dots\right), \quad (15)$$

$$\bar{\theta}_{sh} = \theta_{shn} - (\theta_{shn} - \theta_{rn}) \left[\frac{1}{p+1} - \frac{p}{(p+1)^2} \xi + \dots\right], \quad (16)$$

$$\frac{p^n}{(p+1)^n} \rightarrow \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{d\tau^{n-1}} (\tau^{n-1} e^{-\tau}). \quad (17)$$

Воспользовавшись (17), находим

$$\theta_r = \theta_{shn} - (\theta_{shn} - \theta_{rn}) (1 - e^{-\tau} \xi + \dots), \quad (18)$$

$$\theta_{sh} = \theta_{shn} - (\theta_{shn} - \theta_{rn}) (1 - e^{-\tau} - \tau e^{-\tau} \xi + \dots). \quad (19)$$

Учтем перепад температуры по объему шара. Выражения (а) – (г) можно привести к виду:

$$\frac{\partial \theta_{sh}}{\partial \tau} = \frac{1}{3Bi} \left(\frac{\partial^2 \theta_{sh}}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial \theta_{sh}}{\partial \rho} \right), \quad (20)$$

$$\frac{\partial \theta_{sh}(1, \tau)}{\partial \tau} = \theta_r - \theta_{sh}(1, \tau), \quad (21)$$

$$\left(\frac{\partial \theta_{sh}}{\partial \rho} \right)_{\rho=1} = Bi [\theta_r - \theta_{sh}(1, \tau)], \quad (22)$$

$$\theta_{sh}(\rho, \xi, 0) = \theta_{shn}, \quad \theta_r(0, \tau) = \theta_{rn}, \quad (23)$$

$\rho = r/r_0$, $Bi = \alpha r_0 / \lambda$, λ – теплопроводность материала шаров.

Решение задачи в изображениях имеет вид:

$$\bar{\theta}_r = \theta_{shn} - (\theta_{shn} - \theta_{rn}) \exp \left[- \frac{V \sqrt{3Bi} p \operatorname{ch} V \sqrt{3Bi} p - \sin V \sqrt{3Bi} p}{V \sqrt{3Bi} p \operatorname{ch} V \sqrt{3Bi} p + (Bi - 1) \operatorname{sh} V \sqrt{3Bi} p} \xi \right], \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \bar{\theta}_{sh} = \theta_{shn} - (\theta_{shn} - \\ - \theta_{rn}) \frac{\exp \left[- \frac{V \sqrt{3Bi} p \operatorname{ch} V \sqrt{3Bi} p - \operatorname{sh} V \sqrt{3Bi} p}{V \sqrt{3Bi} p \operatorname{ch} V \sqrt{3Bi} p + (Bi - 1) \operatorname{sh} V \sqrt{2Bi} p} \xi \right] Bi \operatorname{sh} V \sqrt{3Bi} p \rho}{\rho [V \sqrt{3Bi} p \operatorname{ch} V \sqrt{3Bi} p + (Bi - 1) \operatorname{sh} V \sqrt{3Bi} p]}. \end{aligned} \quad (25)$$

Выражения (24), (25) можно записать в виде

$$\bar{\theta}_r = \theta_{shn} - (\theta_{shn} - \theta_{rn}) \left[1 - \frac{V \sqrt{3Bi} p \operatorname{ch} V \sqrt{3Bi} p - \operatorname{sh} V \sqrt{3Bi} p}{V \sqrt{3Bi} p \operatorname{ch} V \sqrt{3Bi} p + (Bi - 1) \operatorname{sh} V \sqrt{3Bi} p} \xi + \dots \right], \quad (26)$$

$$\bar{\theta}_w = \theta_{\text{шн}} - (\theta_{\text{шн}} - \theta_{\text{гн}}) \left\{ \frac{\text{Bi sh } \sqrt{3\text{Bi}} p \rho}{\rho [\sqrt{3\text{Bi}} p \text{ ch } \sqrt{3\text{Bi}} p + (\text{Bi} - 1) \text{ sh } \sqrt{3\text{Bi}} p]} - \frac{\text{Bi sh } \sqrt{3\text{Bi}} p \rho (\sqrt{3\text{Bi}} p \text{ ch } \sqrt{3\text{Bi}} p - \text{ sh } \sqrt{3\text{Bi}} p)}{\rho [\sqrt{3\text{Bi}} p \text{ ch } \sqrt{3\text{Bi}} p + (\text{Bi} - 1) \text{ sh } \sqrt{3\text{Bi}} p]^2} \xi + \dots \right\}. \quad (27)$$

Переходя к оригиналу по известным формулам операционного исчисления, получим:

$$\theta_r = \theta_{\text{шн}} - (\theta_{\text{шн}} - \theta_{\text{гн}}) \left[1 - 2\text{Bi} \sum_n \frac{\exp \left[-\beta_n^2 \frac{\tau}{3\text{Bi}} \right]}{\beta_n^2 - \text{Bi} (1 - \text{Bi})} \xi + \dots \right], \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \theta_w = \theta_{\text{шн}} - (\theta_{\text{шн}} - \theta_{\text{гн}}) & \left\{ 1 - 2\text{Bi} \sum_n \frac{\exp \left[-\beta_n^2 \frac{\tau}{3\text{Bi}} \right]}{[\beta_n^2 - \text{Bi} (1 - \text{Bi})]} \frac{\sin \beta_n \rho}{\rho \sin \beta_n} + \right. \\ + 2\text{Bi} \sum_n \frac{\exp \left[-\beta_n^2 \frac{\tau}{3\text{Bi}} \right]}{[\beta_n^2 - \text{Bi} (1 - \text{Bi})]} \frac{\sin \beta_n \rho}{\rho \sin \beta_n} \xi & - 2\text{Bi}^2 \sum_n \frac{\exp \left[-\beta_n^2 \frac{\tau}{3\text{Bi}} \right]}{[\beta_n^2 - \text{Bi} (1 - \text{Bi})]^2 \rho \sin \beta_n} \left[\left(\frac{2\beta_n^2}{\beta_n^2 - \text{Bi} (1 - \text{Bi})} + \right. \right. \\ + \text{Bi} + \frac{2\beta_n^2}{3\text{Bi}} \tau) \sin \beta_n \rho - \beta_n \rho \cos \beta_n \rho] & \left. \left. \xi + \dots \right\}. \quad (29) \end{aligned}$$

Здесь

$$\frac{\text{tg } \beta_n}{\beta_n} = \frac{1}{1 - \text{Bi}}; \quad (30)$$

при малых Bi

$$\frac{\text{tg } \beta_n}{\beta_n} = 1 + \frac{1}{3} \beta_n^2 + \dots = 1 + \text{Bi}, \quad (31)$$

$$\beta_n^2 = 3\text{Bi} + O(\text{Bi}^2). \quad (32)$$

При $\text{Bi} \rightarrow 0$ выражения (28), (29) переходят в (18), (19).

В случае $\text{Bi} = 1$ уравнение (30) принимает вид

$$\cos \beta_n = 0. \quad (33)$$

Последующие члены рядов (28), (29) могут быть получены обычными методами операционного исчисления.

Центральный научно-исследовательский институт
черной металлургии

Поступило
7 VII 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ A. Anzelius, ZAMM, 6, № 4 (1926). ² Тен-Бош, Теплопередача, 1930.
³ T. Schuman, J. Franklin Inst., 208, № 3 (1929). ⁴ А.К. Шаха, Химстрой, № 5 (1935).
⁵ А. М. Эфрос, А. М. Данилевский, Операционное исчисление и контурные интегралы, 1937.