Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXVI, № 2

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

М. Г. СЛОБОДЯНСКИЙ

ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ ИСКОМОЙ ВЕЛИЧИНЫ ПРИ РЕШЕНИИ ЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ВАРИАЦИОННЫМ МЕТОДОМ

(Представлено академиком А. И. Некрасовым 9 VII 1952)

1°. Пусть

$$Au = f, \qquad Av = \psi, \tag{1}$$

где A — положительно-определенный симметричный оператор, определенный на линеале M в данном гильбертовом пространстве H; $u \in M$, $v \in M$; f, ψ — заданные элементы из H. Тогда, как известно [1,2], существуют элементы $u_0 \in M$, $v_0 \in M$, дающие соответствующим функционалам

$$F_f(u) = (Au, u) - 2(u, f), \qquad F_\psi(v) = (Av, v) - 2(v, \psi) \tag{2}$$

наименьшие значения.

Поставим перед собой задачу определения приближенного значения (f, v) и оценки погрешности этого приближения. Такие приближенные значения (f, v) приходится искать, когда, например, для определения искомой функции и ее производных до определенного порядка вводим специальным образом построенные функции Грина [3].

Пусть $\{\varphi'_n\}$ — последовательность элементов линеала M, при помощи которой построены по методу Ритца или Галеркина приближенные решения минимальных задач

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha'_k \varphi'_n, \qquad v_n = \sum_{k=1}^{n} \beta'_k \varphi'_n, \tag{3}$$

т. е.

$$\sum_{k=1}^{n} (A\varphi'_k, \varphi'_j)\, \alpha'_k = (f, \varphi'_j), \qquad \sum_{k=1}^{n} (A\varphi'_k, \varphi'_j)\, \beta'_k = (\psi, \varphi'_j). \tag{4}$$

Если из последовательности $\{\varphi'_n\}$ построим ортонормированную последовательность элементов $\{\varphi_n\}$ так, что

$$(A\varphi_k, \varphi_j) = 0, \quad j \neq k; \qquad (A\varphi_k, \varphi_j) = 1, \quad j = k; \tag{5}$$

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha'_k \varphi'_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k, \qquad v_n = \sum_{k=1}^{n} \beta'_n \varphi'_n = \sum_{k=1}^{n} \beta_k \varphi_k, \tag{6}$$

$$\alpha_k = (f, \varphi_k), \qquad \beta_k = (\psi, \varphi_k), \tag{7}$$

то, как показал С. Г. Михлин [1], правые части (6) совпадают с отрезками рядов для u_0 и v_0

$$u_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \varphi_k, \quad v_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \varphi_k, \tag{8}$$

представляющих точные решения минимальных задач.

Подставляя (8) в (2), принимая во внимание (5), найдем:

$$\begin{gathered} F_f(u_0) = -\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2, \quad F_f(u_n) = -\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2, \\ F_\psi(v_0) = -\sum_{k=1}^{n} \beta_k^2, \quad F_\psi(v_n) = -\sum_{k=1}^{n} \beta_k^2. \end{gathered} \tag{9}$$

Примем за приближенное значение (f, v_0) значение (f, v_n) и оценим разность $|(f, v_0) - (f, v_n)|$. Имеем:

$$|(f, v_0 - v_n)| = \left| \left(f, \sum_{k=n+1}^{\infty} \beta_k \varphi_k \right) \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \beta_k (f, \varphi_k) \right| = \sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k \beta_k.$$

На основании неравенства Коши — Буняковского получим:

$$|(f, v_0 - v_n)| < \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \beta_k^2 \right)^{1/2} = \delta_1, \tag{10}$$

$$\delta_1 = [F_f(u_n) - F_f(u_0)]^{1/2} [F_\psi(v_n) - F_\psi(v_0)]^{1/2}. \tag{11}$$

Предположим, что, применяя метод Ритца или Галеркина к другой вариационной задаче (например, принцип Кастильяно в теории упругости), мы нашли таким же образом

$$(f, v_0) - b_n^* < [F_f(u_0) - a_n^*]^{1/2} [F_\psi(v_0) - c_n^*]^{1/2}, \tag{12}$$

где b_n^* — приближенное значение (f, v),

$$a_n^* < F_f(u_0) < F_f(u_n), \quad c_n^* < F_\psi(v_0) < F_\psi(v_n). \tag{13}$$

Из (11) и (13) следует:

$$\delta_1 \leqslant [F_f(u_n) - a_n^*]^{1/2} [F_\psi(v_n) - c_n^*]^{1/2}. \tag{14}$$

Примем теперь за приближенное значение (f, v) величину

$$\frac{(f, v_n) + b_n^*}{2} \tag{15}$$

и оценим разность $\left| (f, v_0) - \frac{(f, v_n) + b_n^*}{2} \right|$. Имеем на основании (10), (11) и (12):

$$\begin{aligned} \left| (f, v_0) - \frac{(f, v_n) + b_n^*}{2} \right| \leqslant \frac{1}{2} [F_f(u_n) - F_f(u_0)]^{1/2} [F_\psi(v_n) - F_\psi(v_0)]^{1/2} + \\ + \frac{1}{2} [F_f(u_0) - a_n^*]^{1/2} [F_f(v_0) - c_n^*]^{1/2}. \end{aligned} \tag{16}$$

Применяя к правой части (16) неравенство Гельдера, найдем:

$$\left| (f, v_0) - \frac{(f, v_n) + b_n^*}{2} \right| \leqslant \delta, \tag{17}$$

$$\delta = \frac{1}{2} [F_f(u_n) - a_n^*]^{1/2} [F_\psi(v_n) - c_n^*]^{1/2}. \tag{18}$$

Так как мы фактически умеем находить только разности $F_f(u_n) - a_n^*$, $F_\psi(v_n) - c_n^*$, то оценка (18) в два раза точнее оценки (14), при этом за приближенное значение (f, v) принято (15).

2°. Оценка (18) может быть получена также следующим образом. Имеем тождество:

$$(f, v_0) = \frac{1}{4\lambda}\left[(f + \lambda\psi,\ u_0 + \lambda v_0) - (f - \lambda\psi,\ u_0 - \lambda v_0)\right], \tag{19}$$

где λ — пока неопределенный параметр.

Так как

$$(Au_0, u_0) - (f, u_0) = 0,$$

то, как известно,

$$F_f(u_0) = (Au_0, u_0) - 2(f, u_0) = -(f, u_0), \tag{20}$$

$$F_{f\pm\lambda\psi}(u_0 \pm \lambda v_0) = -(f \pm \lambda\psi,\ u_0 \pm \lambda v_0). \tag{21}$$

Тогда

$$F_{f\pm\lambda\psi}(u_0 \pm \lambda v_0) < F_{f\pm\lambda\psi}(u_n \pm v_n) = a_n \pm 2b_n\lambda + c_n\lambda^2, \tag{22}$$

$$a_n = F_f(u_n), \quad c_n = F_\psi(v_n). \tag{23}$$

Положим, что можно найти числа a_n^*, b_n^*, c_n^* так, что

$$F_{f\pm\lambda\psi}(u_0 \pm \lambda v_0) > a_n^* \pm 2b_n^*\lambda + c_n^*\lambda^2. \tag{24}$$

Из (19), принимая во внимание (21) — (24), найдем:

$$\left|(f, v_0) - \frac{1}{2}(b_n + b_n^*)\right| \leqslant \left|\frac{a_n - a_n^*}{4\lambda} + (c_n - c_n^*)\frac{\lambda}{4}\right|, \tag{25}$$

где $a_n - a_n^* > 0$, $c_n - c_n^* > 0$, $\lambda > 0$.

Выберем теперь $\lambda = \lambda_0$ так, чтобы правая часть (25) имела наименьшее значение. Имеем:

$$-\frac{a_n - a_n^*}{\lambda_0^2} + c_n - c_n^* = 0, \quad \lambda_0 = \sqrt{\frac{a_n - a_n^*}{c_n - c_n^*}},$$

и, следовательно,

$$\left|(f, v_0) - \frac{1}{2}(b_n + b_n^*)\right| \leqslant \delta, \quad \delta = \frac{1}{2}\sqrt{(a_n - a_n^*)(c_n - c_n^*)}, \tag{26}$$

или, принимая во внимание (23):

$$\delta = \frac{1}{2}\left[F_f(u_n) - a_n^*\right]^{1/2}\left[F_\psi(v_n) - c_n^*\right]^{1/2}, \tag{27}$$

т. е. мы получили оценку (18).

3°. Применим оценку (18) к пространственной задаче теории упругости.

Пусть u', v', w', X', Y', Z', X'_ν, Y'_ν, Z'_ν — одна система смещений, объемных и поверхностных сил; u'', v'', w'', X'', Y'', Z'', X''_ν, Y''_ν, Z''_ν — другая система смещений, объемных и поверхностных сил. Пусть на части поверхности S_1 смещения равны нулю, а на части поверхности S_2

поверхностные силы равны нулю. Введем обозначения: (σ'), (σ'') — компоненты напряжения; $\Pi(u')$, $\Pi(u'')$ — потенциальная энергия; $A^*(\sigma') = A_0^*(u')$ и $A^*(\sigma'') = A_0^*(u'')$ — дополнительные работы, соответствующие указанным смещениям. Далее, (u'_n), (u''_n) — допустимые системы смещений на основании принципа возможных перемещений (принцип минимума потенциальной энергии), (σ'_n), (σ''_n) — допустимые системы напряжений на основании принципа Кастильяно (принцип минимума дополнительной работы).

Пусть требуется найти

$$F(u', u'') = \iiint_D (X'' u' + Y'' v' + Z'' w')\, d\tau. \tag{28}$$

Учитывая, что в нашем случае

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} F_f(u_0) &= \Pi(u') = -A^*(\sigma'), \\ \frac{1}{2} F_\psi(v_0) &= \Pi(u'') = -A^*(\sigma''), \end{aligned} \tag{29}$$

получим следующую оценку для приближенного значения $F(u', u'')$:

$$\left| F(u', u'') - \frac{1}{2}(b_n + b_n^*) \right| \leqslant \delta, \tag{30}$$

$$\delta = [\Pi(u'_n) + A^*(\sigma'_n)]^{1/2} [\Pi(u''_n) + A^*(\sigma''_n)]^{1/2}, \tag{31}$$

причем b_n и b_n^* являются коэффициентами при λ в первой степени в выражениях для $\Pi(u'_n + \lambda u''_n)$ и $A^*(\sigma'_n + \lambda\sigma''_n)$.

Для доказательства (30) и (31) надо либо повторить рассуждения 1°, 2° в применении к рассматриваемой задаче теории упругости, либо ввести гильбертово пространство [1] и показать, что задача об определении (28) приводится к задаче об определении (f, v), рассмотренной в 1° и 2°.

Приближенное решение (15) и оценка погрешности (31) применены нами к определению изгибающего момента в середине прямолинейной грани защемленной пластины в форме полукруга, находящейся под действием равномерной нагрузки, и к определению прогиба в произвольной точке защемленной по контуру квадратной пластины под действием равномерной нагрузки.

В первой задаче использованы результаты работы [3], получающаяся погрешность для значения изгибающего момента меньше 1,5% от точного значения.

Во второй задаче в качестве допустимых функций взяты функции, использованные в работах [1,5,6], при этом, если удержать лишь одну аппроксимирующую функцию, погрешность для прогиба в центре пластины составляет 4,5% от точного значения, а при удержании трех аппроксимирующих функций 1,2% от точного значения.

Поступило
18 III 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Г. Михлин, Прямые методы в математической физике, 1950. [2] K. Friedrichs, Math. Ann., **109**, H. 4—5 (1934). [3] М. Г. Слободянский, Прикладн. матем. и мех., **15**, № 2 (1951). [4] Е. Трефтц, Математическая теория упругости, 1934. [5] Л. С. Лейбензон, Вариационные методы решения задач теории упругости, 1943. [6] С. П. Тимошенко, Теория упругости, 1934.